# D2 : démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

On considère un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, une application $A \in \mathcal{C}(I, M_n(\mathbb{K}))$, c'est-à-dire que pour tout $t \in I$, $A(t) \in M_n(\mathbb{K})$ et une fonction $B \in \mathcal{C}(I, M_{n,1}(\mathbb{K}))$.

Dans ce qui suit, on note $F = M_{n,1}(\mathbb{K})$. On cherche d'une fonction $X \in \mathcal{C}^1(I, F)$ vérifiant l'équation $(E)$ suivante :

$$\forall\, t \in I,\ X'(t) = A(t).X(t) + B(t) \qquad (E)$$

Le héros de cette théorie est le :

**Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire :** avec les hypothèses précédentes, si on fixe un $t_0 \in I$ et un $X_0 \in F$, alors il existe une unique solution $t \mapsto X(t)$ de $(E)$ sur $I$ vérifiant $X(t_0) = X_0$.

Le but de ce qui suit est de donner une démonstration de ce théorème.

Pour tout le problème, on choisit arbitrairement une norme $\|\cdot\|$ sur $F$ et pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ on note $|||M|||$ la norme subordonnée à ce choix de norme sur $F$ pour l'application linéaire $X \mapsto M.X$.

1) a) Rappeler les définitions équivalentes de la norme subordonnée.
   b) Montrer que $X$ vérifie $(E)$ sur $I$ avec la condition initiale $X(t_0) = X_0$ si, et seulement si,

$$\forall\, t \in E,\ X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))\mathrm{d}s. \qquad \text{(formulation intégrale du pb. de Cauchy)}$$

**Idée :** *la fonction $X$ qu'on cherche est donc un « point fixe » pour l'opérateur $I : X \mapsto ((t \mapsto X_0 + \int_{t_0}^{t}(A(s)X(s)+B(s))$, avec $I :\ \mathcal{C}^1(I,F) \to \mathcal{C}^1(I,F)$. Pour trouver ce point fixe, on va l'obtenir comme limite d'une suite récurrente $\Phi_{n+1} = I(\Phi_n)$.*

Pour les questions 2. à 4. on définit une suite $(\Phi_n)$ de fonctions de $I$ dans $F$ par :

$$\forall t \in I, \Phi_0(t) = X_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \Phi_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s).\Phi_n(s) + B(s))\,\mathrm{d}s.$$

2) Justifier que les fonctions $\Phi_n$ sont bien définies et de classe $C^1$.
3) Soit $[\alpha, \beta]$ un segment de $\mathbb{R}$ inclus dans $I$ et contenant $t_0$.
   a) Justifier l'existence des réels $\mu = \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |||A(t)|||$ et $M = \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \|\Phi_1(t) - \Phi_0(t)\|$.
   b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [\alpha, \beta], \|\Phi_{n+1}(t) - \Phi_n(t)\| \leqslant \mu \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|\Phi_n(s) - \Phi_{n-1}(s)\|\,\mathrm{d}s$.
   c) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [\alpha, \beta], \|\Phi_{n+1}(t) - \Phi_n(t)\| \leqslant \frac{M\mu^n|t-t_0|^n}{n!}$.
4) **Preuve de l'existence de Cauchy-Lipschitz :**
   a) Montrer que la suite $(\Phi_n)$ converge uniformément sur tout segment de $I$. En particulier, la suite $(\Phi_n)$ converge simplement sur $I$ ; on note $\Phi$ sa limite simple.
   b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$ on pose $\Psi_n(t) = A(t)(\Phi_n(t)) + B(t)$. Montrer que la suite $(\Psi_n)$ converge uniformément sur tout segment de $I$ vers une fonction $\Psi$ que l'on précisera.
   c) Montrer que $\Phi$ est solution de du problème de Cauchy défini par $((E), \Phi(t_0) = X_0)$.
5) **Preuve de l'unicité :** Soient maintenant $X_1$ et $X_2$ deux solutions de $(E)$ vérifiant la même condition initiale $X_i(t_0) = X_0$ pour $i = 1, 2$. On pose $\Delta = X_1 - X_2$.
   a) Montrer : $\forall t \in I, \Delta(t) = \int_{t_0}^{t} A(s).(\Delta(s))\mathrm{d}s$.
   b) On considère de nouveau un segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans $I$ et contenant $t_0$. On définit $\mu$ comme au 3.a) mais on pose cette fois $M = \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \|\Delta(t)\|$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [\alpha, \beta], \|\Delta(t)\| \leqslant \frac{M\mu^n\,|t - t_0|^n}{n!}.$$

   c) Conclure que $X_1 = X_2$.