# MP DM 11

*Pour le lundi 2 février 2026*

## PROBLÈME 1

**Ce problème comporte 3 parties indépendantes.**

**Notations et définitions**

- $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
- $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbf{R}[X]$ désigne le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{R}_n[X]$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$.
- Si $n_1$ et $n_2$ sont deux entiers naturels, on note $[\![n_1, n_2]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris (au sens large) entre $n_1$ et $n_2$.

**Objectifs**

On s'intéresse dans ce problème à l'équation différentielle $x^2y'' + axy' + by = 0$. La **partie I** est une partie d'algèbre linéaire qui traite des solutions polynomiales de cette équation lorsque $a$ et $b$ sont des constantes réelles. Dans la **partie II**, on détermine l'ensemble des solutions de l'équation lorsque $a$ et $b$ sont des constantes réelles. La **partie III** traite des solutions de cette équation lorsque $a = 1$ et $b$ est la fonction carrée.

## Partie I - Endomorphismes

Dans toute cette partie, $n$ désigne un entier naturel non nul et $a$ et $b$ des constantes réelles.

**Q1.** On note $\Delta$ l'endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \quad \Delta(P) = XP.'$$

Calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\Delta(X^k)$.

**Q2.** Montrer que pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $X^2P'' = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P)$, où Id désigne l'endomorphisme identité sur $\mathbf{R}[X]$.

**Q3.** Montrer que si $P \in \mathbf{R}_n[X]$, $\Delta(P) \in \mathbf{R}_n[X]$.

On notera $\Delta_n$ l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ induit par $\Delta$.

**Q4.** Déterminer la matrice de $\Delta_n$ dans la base canonique $(1, X, \cdots, X^n)$ de $\mathbf{R}_n[X]$.

**Q5.** On définit l'application $\Phi$ par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \quad \Phi(P) = X^2P'' + aXP'.$$

Montrer que $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$ et en déduire que $\Phi$ définit un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

**Q6.** Montrer que $\Phi$ induit un endomorphisme $\Phi_n$ de $\mathbf{R}_n[X]$.

**Q7.** Montrer que $\Phi_n$ est diagonalisable.

On considère l'endomorphisme $\varphi$ de $\mathbf{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \quad \varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP.$$

**Q8.** Montrer que $\varphi$ induit un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$, endomorphisme que l'on notera $\varphi_n$. Exprimer $\varphi_n$ en fonction de $\Delta_n$.

**Q9.** Exprimer la matrice de $\varphi_n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

On considère l'équation :

$$s^2 + (a-1)s + b = 0. \tag{1}$$

**Q10.** Expliciter le noyau de $\varphi_n$ lorsque l'équation (1) admet deux racines entières $m_1, m_2 \in [\![0, n]\!]$.

**Q11.** Expliciter le noyau de $\varphi_n$ lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in [\![0, n]\!]$.

**Q12.** Déterminer le noyau de $\varphi$. En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.

## Partie II - Une équation différentielle

On considère dans cette partie l'équation différentielle

$$x^2y'' + axy' + by = 0, \tag{2}$$

où $a$ et $b$ sont des constantes réelles.

**Q13.** Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (2) sur $I = ]0, +\infty[$ ? Et sur $J = ]-\infty, 0[$ ?

**Q14.** Montrer que si $y$ est une solution de (2) sur $I$, alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$u'' + (a-1)u' + bu = 0. \tag{3}$$

**Q15.** Réciproquement, soit $t \mapsto g(t)$ une solution de (3) sur $\mathbf{R}$. Montrer que la fonction $g \circ \ln$ est solution de (2) sur $I$.

**Q16.** Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (3) dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$. En déduire, dans chacun des cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (2) sur l'intervalle $I$.

On suppose *dans les deux questions suivantes uniquement* que $a = 1$ et $b = -4$.

**Q17.** Montrer que si $y$ est solution de (2) sur $J$, alors $h = y \circ (-\exp)$ est solution de (3) sur $\mathbf{R}$.

**Q18.** Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (2) de classe $C^2$ sur $\mathbf{R}$.

## Partie III - Une équation de Bessel

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0. \tag{4}$$

**Q19.** Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

**Série entière dont la somme est solution de (4)**

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence $R > 0$ et dont la fonction somme $J_0$ est solution de (4) sur $]-R, R[$.

**Q20.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} & = & 0 \\ c_{2k} & = & \dfrac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} \end{cases}.$$

**Q21.** Déterminer le rayon de convergence $R$ de la série entière obtenue : $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$.

**Q22.** Soit $r > 0$ et soit $f$ une autre solution de (4) sur $]0, r[$. Montrer que si $(J_0, f)$ est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe $C^2$ sur $]0, r[$, alors $f$ est bornée au voisinage de 0.

**Inverse d'une série entière non nulle en 0**

Soit $\sum_{k\geq 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k\geq 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout $x$ appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left( \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k \right) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = 1.$$

**Q23.** Montrer que si $\sum_{k\geq 0} \beta_k x^k$ est solution, alors la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbf{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} & \beta_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}^* & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} & = & 0 \end{cases}. \tag{5}$$

Soit $r$ un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

**Q24.** Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$ :

$$|\alpha_k| \leq \frac{M}{r^k}.$$

**Q25.** Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ :

$$|\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence.

**Q26.** Que peut-on dire du rayon de convergence $R_\beta$ de la série entière $\sum_{k\geq 0} \beta_k x^k$ ?

**Ensemble des solutions de (4)**

**Q27.** Soit $r > 0$ et soit $\lambda$ une fonction de classe $C^2$ sur $]0, r[$.
Montrer que la fonction $y : x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0, r[$ si et seulement si la fonction $x \mapsto xJ_0^2(x)\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$.

**Q28.** Montrer que $J_0^2$ est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$ ?

**Q29.** En déduire l'existence d'une fonction $\eta$ somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que

$$x \mapsto \eta(x) + J_0(x)\ln(x)$$

soit solution de (4) sur un intervalle $]0, R_\eta[$.

**Q30.** En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$.