Théorème de CvS de Dirichlet pour les séries de Fourier

Partie I : version non optimale pour les fonctions $\mathcal{C}^2$

D'après Oral Centrale 1 2022

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique. On pose $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbf{Z}$ (coefficient de Fourier complexe de f) puis $S_N(f) : x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$ la somme partielle d'ordre n de sa série de Fourier et $D_N : x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$ pour $N \in \mathbf{N}$, appelé *noyau de Dirichlet.*

a) (Version $\mathcal{C}^1$ du lemme de Riemann-Lebesgue) Montrer que $\displaystyle\int_a^b \phi(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$.

b) Montrer que $S_N(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)dt$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

c) Montrer que $D_N(u) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})u)}{\sin u/2}$ pour tout $u \in \mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z}$

d) Montrer que $(S_N(f))_{N\in N}$ converge simplement vers f sur $\mathbf{R}$.

Partie II : amélioration : CvS vers $m(f)$ dans le cas $\mathcal{C}^1$-par morceaux

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 2π-périodique, et $\mathcal{C}^1$-par morceaux ce qui signifie qu'il existe une subdivision $x_0 = -\pi < x_1 < \cdots < x_{n-1} < c_n = \pi$ de $[-\pi,\pi]$ telle que $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ soit $\mathcal{C}^1$ et f et f' admettent une limite finie à gauche et à droite en tous les points x_i. On pose encore $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbf{Z}$, puis $S_N(f) : x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$ et $D_N : x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$ pour $N \in \mathbf{N}$.

La preuve qui suit est très analogue à celle de la partie 1 mais le résultat du a) est plus difficile à établir et pour le d) on doit remplacer $f(x)$ par $m(f)(x)$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_a^b \phi(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{CM}([a,b]$, C).

b) Montrer que $S_N(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}D_N(u)du$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

c) (vide ici) On rappelle qu'on a montré au I c) que $D_N(u) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{\sin u}$ pour tout $u \in \mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z}$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $m(f)(x) = \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ la moyenne des limites à gauche et à droite de f au point x.

Montrer que $(S_N(f))_{N\in N}(x)$ converge vers $m(f)(x) = \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

N.B. 1 Ce théorème s'applique donc aux fonctions de type « créneaux » que vous rencontrez en physique.

N.B. 2 Dans le cas des fonctions continues, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, par exemple un signal triangle, on peut montrer, mieux, que $(S_N(f))$ converge uniformément vers f. Cela n'est pas le cas si f présente une discontinuité (phénomène de Gibbs).

Solution

Partie I : a) ici dans le cas $\mathcal{C}^1$ une simple I.P.P. suffit.

Notons $I_x(\phi) = \displaystyle\int_a^b \phi(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t$. On peut supposer $x > 0$ puisqu'on étudie ce qui se passe pour $x \to +\infty$.

Par I.P.P, comme ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$, en posant $\begin{cases} u(\theta) = \phi(\theta) \Rightarrow u'(\theta) = \phi'(\theta), \\ v'(\theta) = \exp(ix\theta) \Leftarrow v(\theta) = \dfrac{1}{ix}\exp(xi\theta), \end{cases}$ on obtient :

$I_x(\phi) = \left[\dfrac{\phi(\theta)\exp(ix\theta)}{ix}\right]_a^b - \displaystyle\int_a^b \dfrac{\phi'(\theta)\exp(ix\theta)}{ix}d\theta$

Donc, comme $x > 0$, par I.T.

$|I_x(\phi)| \leq \dfrac{|\phi(b)\exp(ixb)| + |\phi(a)\exp(ixa)|}{x} + \left|\displaystyle\int_a^b \dfrac{\phi'(\theta)\exp(ix\theta)}{ix}d\theta\right| \quad (*)$

Par I.T. pour les intégrales, $\left|\displaystyle\int_a^b \dfrac{\phi'(\theta)\exp(ix\theta)}{ix}d\theta\right| \leq \displaystyle\int_a^b \dfrac{|\phi'(\theta)|.|\exp(ix\theta)|}{x}d\theta = \displaystyle\int_a^b \dfrac{|\phi'(\theta)|}{x}d\theta$

Comme ϕ' est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ il existe un $M > 0$ tel que $\forall\, \theta \in [a,b]$, $|\phi'(\theta)| \leq M$.

En revenant à $(*)$, on a : $|I_x(\phi)| \leq \dfrac{|\phi(b)| + |\phi(a)|}{x} + \displaystyle\int_a^b \dfrac{M}{x}d\theta$.

Comme $\displaystyle\int_a^b \dfrac{M}{x}d\theta = \dfrac{M(b-a)}{x}$, on conclut bien que :

$\forall\, x > 0, |I_x(\phi)| \leq \dfrac{A}{x}$ où $A = |\phi(a)| + |\phi(b)| + M(b-a)$ est une constante indépendante de x.

Donc $I_x(\phi) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Cette écriture simple de $S_N(f)$ comme *convolution* 2π*-périodique* de f avec D_N est la raison d'être du noyau de Dirichlet D_N. Par linéarité de l'intégrale, (on ne considère que des sommes finies), on a :

$$S_N(f) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)}\Big)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)dt \quad (1)$$

Autrement dit S_N est la convoluée de f avec D_N dans le monde des fonctions 2π-périodiques.

c) La fonction D_N s'appelle le *noyau de Dirichlet.*

Soit $u \in \mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z}$, alors par formule sur les sommes des termes géométriques :

$$\begin{aligned} D_N(u) &= \frac{e^{-iNu} - e^{i(N+1)u}}{1-e^{iu}} \\ &= \frac{e^{iu/2}\big(e^{-i(N+\frac{1}{2})u} - e^{i(N+\frac{1}{2})u)}\big)}{e^{iu/2}\big(e^{-iu/2} - e^{iu/2}\big)} \\ &= \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \end{aligned}$$

Cette égalité s'étend aux $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ en prolongeant le membre de droite par continuité.

d) **Remarque :** avec l'écriture initiale $D_N \ : u \mapsto \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e^{inu}$, le calcul de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_N$ donne 2π car seul le terme d'indice 0 dans la somme est d'intégrale non nulle.

Donc pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_N(t)dt$ et avec la formule du b), on peut écrire :

$$f(x) - S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f(t))D_N(x-t)dt$$

ou encore, par un changement de variable $u = x-t$ où les bornes ne changent pas par 2π-périodicité de l'intégrande :

$$f(x) - S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f(x-u))D_N(u)dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\phi(u) = \dfrac{f(x) - f(x-u)}{\sin(u/2)}$ de sorte que :

$$f(x) - S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(u)\sin((N+\frac{1}{2})u)du \quad (\dagger)$$

La fonction ϕ est bien $\mathcal{C}^1$ (même $\mathcal{C}^2$ avec l'hyp. sur f ici) en tout point u où $\sin(u/2) \neq 0$. Dans $[-\pi,\pi]$ le seul point à problème est donc 0.

Mais comme f est deux fois dérivable au point x, on a $f(x-u) = f(x) - uf'(x) + u^2/2f''(x) + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$ et $\sin(u/2) = u/2 + o(u^2)$.

Donc $\phi(u) = \dfrac{f'(x) - \frac{u}{2}f''(x) + \underset{u\to 0}{o(u)}}{1/2 + \underset{u\to 0}{o}(u)} = 2f'(x) - f''(x)u + o(u)$ donc ϕ admet un DL_1 et donc admet un prolongement dérivable en 0.

Mais pour appliquer notre pauvre lemme de Riemann-Lebesgue du a), on a besoin, mieux de Φ de classe $\mathcal{C}^1$. On regarde pour cela la limite de la dérivée :

$$\Phi'(u) \quad = \quad \frac{f'(x-u)\sin(u/2) - 1/2\cos(u/2)(f(x) - f(x-u)}{\sin^2(u/2)}$$

avec un DL_2 (vérifiez !).

Mais alors le lemme de Riemann-Lebesgue du a) s'applique à ce ϕ avec $x = N + \frac{1}{2}$, pour conclure qu'avec l'égalité (†) on a :

$$f(x) - S_N(f)(x) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où la convergence simple.

Partie II : a) Lemme de Riemann-Lebesgue plus général fait en exercice de cours au chapitre T3 avec ces hypothèses.

b) Au I b) on a obtenue une écriture simple de $S_N(f)$ comme convolution de f avec D_N :

$$S_N(f) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)})dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)dt \quad (1)$$

Autrement dit S_N est la convoluée de f avec D_N dans le monde des fonctions 2π-périodiques.

Mais pour les besoins du théorème du d) on va couper en deux.

(i) Par changement de variable $u = x - t$ dans (1) on a :

$$S_N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)D_N(u)(du) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x-u)D_N(u)du \quad (2)$$

la dernière égalité étant vraie par 2π-périodicité.

(ii) Par changement de variable $u = t - x$ dans (1), on a :

$$S_N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x+u)D_N(-u)(du) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x+u)D_N(u)du \quad (3)$$

la dernière égalité étant vraie par 2π-périodicité et aussi par parité du noyau D_N.

(iii) Par demi somme de (2) et (3) on trouve bien :

$$S_N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} D_N(u)du$$

Comme l'intégrande $u \mapsto \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}D_N(u)$ est paire (car D_N l'est), on peut encore écrire :

$$S_N(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} D_N(u)du$$

d) Idée : on a vu que $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} D_N = 1$.

Donc pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)D_N(t)dt$ et avec la formule du b), on peut écrire :

$$S_N(f)(x) - m(f)(x) - = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - m(f)(x)\right) D_N(u)du$$

Notons $\phi(u) = \left(\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - m(f)(x)\right)\dfrac{1}{\sin(u/2)} = \left(\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\right)\dfrac{1}{\sin(u/2)}$

Comme f admet par hyp. un DL_1 à gauche et à droite au point x, on a : $\phi(u) = \frac{uf'(x^+) - uf'(x^-) + o(u)}{u/2 + o(u)}$ donc ϕ se prolonge bien par continuité en 0 et donc Riemann-Lebesgue du a) (cas continu) s'applique à ϕ et donc la conclusion.