DM 10 : sur les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(xt)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

Pour le lundi 19 janvier 2026

Ce DM est plutôt « faciles » et les questions souvent très détaillées là où on pourrait à un niveau supérieur donner beaucoup moins de questions, mais c'est l'occasion d'ancrer ces méthodes dans votre mémoire.

Dans ce problème, on désigne par f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, et on étudie en fonction de diverses hypothèses l'intégrale suivante pour tout réel $x > 0$, si elle existe :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(xt) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Dans la partie III, on revient par d'autres méthodes sur le calcul de certaines de ces intégrales.

I : Etude de $F(x)$ lorsque f a une limite finie L en $+\infty$

Dans toute cette partie, on suppose que la fonction continue f admet une limite finie L en $+\infty$.

1) Etude d'un cas particulier

Dans cette question, on donne deux réels p et q et on suppose que la fonction f est définie par :

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) = \frac{pt^2 + q}{t^2 + 1}$$

a) Etablir, pour $x > 0$, qu'il existe des réels a_x et b_x, qu'on exprimera en fonction de x, tels que :

$$\forall t > 0, \quad \frac{f(xt) - f(t)}{t} = (p - q)\left(\frac{a_x t}{x^2t^2 + 1} - \frac{b_x t}{t^2 + 1}\right).$$

b) En posant $u = t^2$, calculer pour tout réel $A \geq 0$ l'intégrale $\int_0^A \frac{f(xt)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et en déduire $F(x)$.

c) Exprimer $L = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ et $f(0)$ à l'aide de p et q, puis $F(x)$ en fonction de $f(0)$, L et $x > 0$.

2) Etude de $F(x)$ pour $x > 0$ lorsque f admet une limite finie L en $+\infty$

On rappelle que, dans cette partie, la fonction continue f admet une limite finie L en $+\infty$.

a) Démontrer les égalités suivantes pour $0 < \varepsilon < A$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{f(xt) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon x}^{Ax} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_\varepsilon^A \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_\varepsilon^{\varepsilon x} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

b) En effectuant un changement de variables dans ces deux dernières intégrales, en déduire que :

$$\int_\varepsilon^A \frac{f(xt) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{f(At)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

c) Etablir qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ ayant une limite finie L en $+\infty$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

d) A l'aide du théorème de convergence dominée, dont on vérifiera soigneusement les hypothèses, déterminer la limite de $\int_1^x \frac{f(At)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque A tend vers $+\infty$ et de $\int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque ε tend vers 0 .

e) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel strictement positif x.
Comparer le résultat ainsi obtenu au résultat particulier obtenu à la question 1°.

3) Application aux cas où $f(t) = \mathrm{Arctan}(t)$ et $f(t) = e^{-t}$

a) Déterminer l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque $f(t) = \mathrm{Arctan}(t)$.
Que vaut l'intégrale $I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(at)-\mathrm{Arctan}(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$ où a et b sont strictement positifs ?

b) Déterminer l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque $f(t) = e^{-t}$.

II : Etude de $F(x)$ lorsque l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge

Dans toute cette partie, on suppose que l'intégrale impropre $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

4) Etude du cas particulier où l'intégrale impropre $J = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge

On suppose plus spécifiquement dans cette question que l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

a) A l'aide d'un changement de variables, déterminer la nature et la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{f(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire la convergence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel strictement positif x.

5) Application au cas où $f(t) = \sin(t)$

a) Démontrer la relation suivante pour $0 < \varepsilon < A$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

b) Déterminer la limite de $\frac{1-\cos(t)}{t}$ lorsque t tend vers 0 , puis vers $+\infty$.

c) Déterminer la limite de $\frac{1-\cos(t)}{t^2}$ lorsque t tend vers 0 , puis justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$, et enfin la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

d) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque $f(t) = \sin(t)$.

6) Etude de $F(x)$ pour $x > 0$ lorsque l'intégrale impropre $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge

On rappelle que, dans cette partie, l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

a) En raisonnant comme à la question 2°, démontrer l'égalité suivante pour $0 < \varepsilon < A$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{f(xt)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

b) Déterminer la limite de $\int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ lorsque A tend vers $+\infty$.

c) Déterminer comme à la question 2° la limite de $\int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque ε tend vers 0 .

d) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel strictement positif x.

7) Application aux cas où $f(t) = e^{it}$ et $f(t) = \cos(t)$

a) Démontrer la relation suivante pour $A > 1$:

$$\int_1^A \frac{e^{it}}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{it}}{it}\right]_1^A - i\int_1^A \frac{e^{it}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire, en la justifiant soigneusement, la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque $f(t) = e^{it}$, puis lorsque $f(t) = \cos(t)$.

III : Une autre méthode de calcul lorsque $f(t) = e^{-t}$ et $f(t) = e^{it}$

Dans cette partie, on considère les deux intégrales suivantes pour $x > 0$:

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}-e^{it}}{t}\,\mathrm{d}t$$

On a démontré leur existence et déterminé leurs valeurs par une première méthode dans I et II. On se propose de retrouver ces résultats par une autre méthode, indépendante des précédentes. A cet effet, on introduit pour tout réel $x > 0$ et tout réel $R \geq 0$ les deux intégrales suivantes :

$$U(x,R) = \int_0^R \frac{e^{-tx}-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad V(x,R) = \int_0^R \frac{e^{itx}-e^{it}}{t}\,\mathrm{d}t$$

8) Etude des fonctions U et V

a) Déterminer les limites des fonctions $t \longrightarrow \frac{e^{-tx}-e^{-t}}{t}$ et $t \longrightarrow \frac{e^{itx}-e^{it}}{t}$ quand t tend vers 0 .
On prolonge alors ces fonctions en 0 par ces limites, de sorte qu'elles sont continues sur $\mathbb{R}_+$.

b) En déduire, pour tout $x > 0$ et tout $R \geq 0$, l'existence des intégrales $U(x,R)$ et $V(x,R)$, puis préciser les dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial R}(x,R)$ et $\frac{\partial V}{\partial R}(x,R)$.

9) Calcul de l'intégrale $u(x)$ pour $x > 0$

a) Justifier la convergence de l'intégrale $u(x)$ pour tout $x > 0$.

b) Montrer que la fonction u est de classe C^1 sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
Donner l'expression (sans intégrale) de $u'(x)$ pour tout $x > 0$.

c) En remarquant la valeur de $u(1)$, en déduire la valeur de l'intégrale $u(x)$ pour $x > 0$.

10) Calcul de l'intégrale $v(x)$ pour $x > 0$

Pour tout $x > 0$ et tout $R \geq 0$, on introduit l'intégrale suivante :

$$\varphi(x,R) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xRe^{-it}} \, \mathrm{d}t$$

a) Montrer que la fonction $R \longrightarrow \varphi(x,R)$ est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
Donner l'expression de sa dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial R}(x,R)$ sous forme intégrale pour tout $x > 0$ et $R \geq 0$, puis calculer cette dernière intégrale en primitivant la fonction sous le signe intégral.

b) Vérifier l'égalité suivante pour tout $x > 0$ et $R \geq 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial R}(x,R) - \frac{\partial V}{\partial R}(x,R) = i\frac{\partial \varphi}{\partial R}(x,R) - i\frac{\partial \varphi}{\partial R}(1,R).$$

En déduire l'égalité suivante pour tout $x > 0$ et $R \geq 0$:

$$U(x,R) - V(x,R) = i\varphi(x,R) - i\varphi(1,R).$$

c) Pour tout $x > 0$, déterminer la limite de $\varphi(x,R)$ lorsque R tend vers $+\infty$.

d) En déduire pour $x > 0$ la convergence de l'intégrale $v(x)$ et l'égalité $u(x) = v(x)$.
Retrouver ainsi les résultats obtenus dans les parties I et II lorsque $f(t) = e^{-t}$ et $f(t) = e^{it}$.