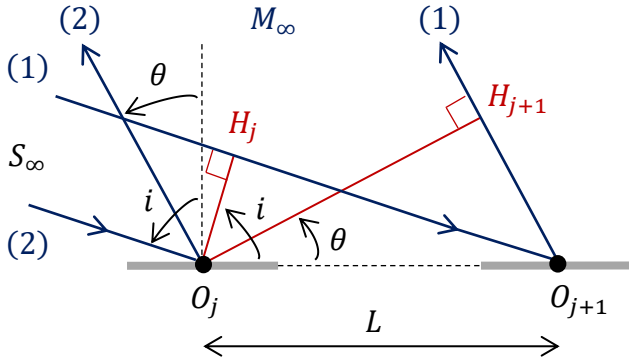


**1-2)** La différence de marche demandée concerne 2 ondes se réfléchissant entre 2 points distants de  $L$  !



$$\delta = (S_{\infty}M_{\infty})_1 - (S_{\infty}M_{\infty})_2 = H_j O_{j+1} + O_{j+1} H_{j+1}$$

$$\delta = L(\sin i + \sin \theta)$$

L'onde rétrodiffusée sera intense si toutes les ondes diffusées par les motifs sont **en phase** :  $\Delta\Phi = 2\pi p$

Avec  $p \in \mathbb{Z}$

$$\text{Or } \Delta\Phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \rightarrow \delta = p\lambda$$

**3)** A partir des équations de Maxwell dans le vide, on explicite la relation

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_i(M, t) \right) = \overrightarrow{\text{grad}} \left( \text{div} \vec{E}_i(M, t) \right) - \Delta \vec{E}_i(M, t) \Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}_i(M, t) = -\Delta \vec{E}_i(M, t)$$

$$\Leftrightarrow \Delta \vec{E}_i(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_i(M, t)}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{Ce qui implique pour une O.P.P.H. : } \vec{K}_i^2 = \vec{k}_i^2 + \vec{q}_i^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

**4)** Dans la bande *HF*, l'épaisseur  $l_a$  est comprise entre **4,6** et **15 cm**. C'est négligeable devant **la profondeur** des mers et les dimensions habituelles des vagues (notamment la grandeur  $h$  définie après). Comme dans un conducteur parfait, la pénétration des ondes dans la mer ne sera pas envisagée.

$$\vec{E}_i(x, y=0, t) + \vec{E}_r(x, y=0, t) = \vec{0} \quad \forall (x, t) \rightarrow \exp(jk_i x) + r_0 \exp(jk_0 x) = 0 \quad \forall x$$

$$\text{On en déduit que } r_0 = -1 \text{ et que } k_0 = k_i. \quad \text{Enfin, } k_0^2 + q_0^2 = k_i^2 + q_i^2 \rightarrow q_0 = q_i > 0$$

$$\vec{OM} = x \vec{u}_x + h(x) \vec{u}_y + z \vec{u}_z \quad \text{Ainsi, } \vec{E}_i(x, h(x), t) + \vec{E}_r(x, h(x), t) = \vec{0} \quad \forall (x, t)$$

$$\rightarrow \exp(j(k_i x - q_i h(x))) - \exp(j(k_i x + q_i h(x))) + r_1 \exp(j(k_r x + q_r h(x))) = 0 \quad \forall x$$

$$\rightarrow -2j \sin(q_i h(x)) \exp(jk_i x) + r_1 \exp(j(k_r x + q_r h(x))) = 0 \quad \forall x$$

$$\text{A l'ordre 1, on obtient bien } -2jq_i h(x) \exp(jk_i x) + r_1 \exp(jk_r x) = 0 \quad \forall x$$

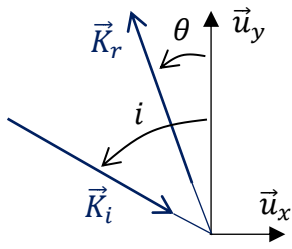
$$\textbf{7)} \text{ La condition devient } -jq_i h_0 \exp(j(k_i - k_v)x) + r_1 \exp(jk_r x) = 0 \quad \forall x$$

$$\text{On en déduit que } r_1 = jq_i h_0 \text{ et que } k_r = k_i - k_v.$$

Le module de  $r_1$  étant proportionnel à  $h_0$ , sa mesure nous permet de connaître **l'amplitude des vagues**.

8) Soit  $\vec{K}_r = k_r \vec{u}_x + q_r \vec{u}_y$ , le vecteur d'onde associé au terme d'ordre 1 dans l'onde réfléchie.

Par linéarité des équations de Maxwell et de l'équation de propagation qui en découle,  $\|\vec{K}_r\| = \|\vec{K}_i\| = \frac{\omega}{c}$



Si on note respectivement  $i$  et  $\theta$ , les deux angles orientés  $(\vec{u}_y, -\vec{K}_i)$  et  $(\vec{u}_y, \vec{K}_r)$ , on peut écrire  $k_i = \frac{\omega}{c} \sin i$  et  $k_r = -\frac{\omega}{c} \sin \theta$ .

Ainsi,  $k_r = k_i - k_v \rightarrow L(\sin i + \sin \theta) = \frac{2\pi c}{\omega} = \lambda$  Loi de Bragg pour  $p = 1$

9-10) On a dans ce cas  $i \sim \theta \sim \frac{\pi}{2}$  et le calcul à l'ordre 1 en  $\epsilon$  reste valable.

Avec  $f = 12,3 \text{ MHz} \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = 24 \text{ m} \rightarrow L = 12 \text{ m}$

11) Onde s'éloignant du rivage :  $h_+(x, t) = h_0 \cos(k_v x - \omega_v t)$

Onde s'approchant du rivage :  $h_-(x, t) = h_0 \cos(k_v x + \omega_v t)$  Avec dans les deux cas,  $\omega_v = k_v U$

12) Dorénavant, pour une onde s'éloignant du rivage,

$$-jq_i h_0 \exp(j((k_i - k_v)x - (\omega - \omega_v)t)) + r_1 \exp(j(k_r x - \omega_r t)) = 0 \quad \forall (x, t)$$

On en déduit que  $\omega_r = \omega - \omega_v$  et que  $k_r = k_i - k_v$ .

$$13) \quad \omega_r = \omega - k_v U = \omega + (k_r - k_i)U = \omega - (\omega_r + \omega) \frac{U}{c} \Leftrightarrow \omega_r \left(1 + \frac{U}{c}\right) = \omega \left(1 - \frac{U}{c}\right)$$

A l'ordre 1 en  $\frac{U}{c}$ ,  $\omega_r \sim \omega \left(1 - \frac{2U}{c}\right) \rightarrow f_r - f = -\frac{2U}{\lambda}$  Pour une onde s'approchant du rivage,  $f_r = f + \frac{2U}{\lambda}$

[On retrouve ici le comportement bien connu en acoustique où le son perçu lorsqu'un véhicule s'approche (resp. s'éloigne) de nous est plus aigu (resp. plus grave) que celui effectivement émis.]

$$14) \quad f_r - f = \pm \frac{2U}{\lambda} = \pm \frac{2\sqrt{g\lambda/(4\pi)}}{\lambda} = \pm \sqrt{\frac{g}{\pi\lambda}} = \pm 0,36 \text{ Hz} \quad (+ \text{ si la vague s'approche du rivage})$$

Il est remarquable de constater qu'en définitive, cette fréquence de Bragg  $f_B$  ne dépend que de  $g$  et  $\lambda$  !

Elle est connue par l'expérimentateur et ne dépend pas de la périodicité des vagues. Elle sera un point de repère pour mesurer la vitesse du courant s'ajoutant à celle des vagues. C'est l'objet de la question suivante

pour laquelle il est conseillé d'écrire  $f_r - f = -\frac{2U_x}{\lambda}$  avec  $U_x$ , la coordonnée de la vitesse de la vague.

**15)** Vitesse selon  $\vec{u}_x$  des vagues s'éloignant du rivage dans  $\mathcal{R}$  :  $\mathbf{U}_x = \mathbf{v}_x + \mathbf{U}$

Vitesse selon  $\vec{u}_x$  des vagues s'approchant du rivage dans  $\mathcal{R}$  :  $\mathbf{U}_x = \mathbf{v}_x - \mathbf{U}$

D'après l'écriture proposée en Q14,  $f_r - f = -\frac{2(v_x \pm U)}{\lambda} \rightarrow f_D = -\frac{2v_x}{\lambda} = -\frac{2fv_x}{c}$

**16)**  $f_B \sim 0,37 \text{ Hz} \rightarrow \lambda \sim 23 \text{ m} \rightarrow L \sim 11,5 \text{ m}$  La mesure semble satisfaisante mais l'énoncé nous pousse à la valider avec le calcul de l'écart-normalisé (Z-score) sans toutefois avoir des détails concernant la précision. Si on décide de façon un peu arbitraire que les incertitudes-types sur chacune des valeurs de  $f_B$  valent  $u(f_B) = \frac{10^{-2}}{\sqrt{3}} \text{ Hz}$ , l'écart normalisé est  $E_N = \frac{0,37 - 0,36}{\sqrt{2} u(f_B)} = 1,2 < 2$ . C'est validé !

A Pendeen,  $f_D = 0,07 \text{ Hz} \rightarrow \mathbf{v}_x = -0,85 \text{ m.s}^{-1}$

Le courant **s'approche** de Pendeen.

A Perranporth,  $f_D = -0,07 \text{ Hz} \rightarrow \mathbf{v}_x = 0,85 \text{ m.s}^{-1}$

Le courant **s'éloigne** de Perranporth.

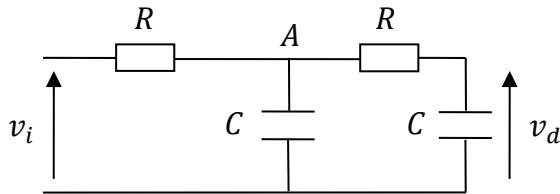
**17)**  $\mathbf{v}_E = -0,78 \text{ m.s}^{-1}$      $\mathbf{v}_N = -0,58 \text{ m.s}^{-1}$      $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_E^2 + v_N^2} = 0,97 \text{ m.s}^{-1}$

Il y a cohérence avec la carte, autant pour le niveau de couleur que pour l'orientation  $((-\vec{u}_E, \vec{v}) = 37^\circ)$ .

**18)**  $v_i = \alpha(\cos(2\pi(f_2 - f_1)t + \varphi_0) + \cos(2\pi(f_2 + f_1)t + \varphi_0))$

Un filtre **pas-se-bas** de fréquence de coupure  $f_c$  telle que  $|f_2 - f_1| < f_c \ll f_2 + f_1$  sélectionnerait  $v_d$ .

**19-20)** On peut opter pour un double  $RC$  ( $f_c \sim \frac{1}{2\pi RC}$ ) ou un  $RLC$  série ( $f_c \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ ) avec par exemple  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$  et  $L = 1 \text{ H}$ . La fréquence de coupure à  $-3 \text{ dB}$  sera alors de l'ordre  $10^2 \text{ Hz}$ .

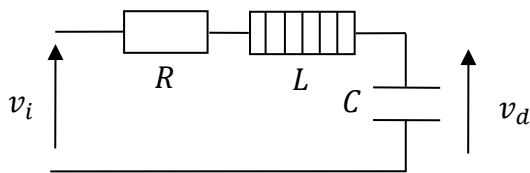


$$V_A = \frac{\frac{v_i}{R} + \frac{v_d}{R} + 0 + jC\omega}{\frac{2}{R} + jC\omega} = \frac{v_i + v_d}{2 + jRC\omega} \quad \text{et} \quad v_d = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} V_A$$

$$\rightarrow v_d = \frac{v_i + v_d}{(2 + jRC\omega)(1 + jRC\omega)} \rightarrow \frac{v_d}{v_i} = \frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$$

Plus précisément, à la pulsation de coupure  $\omega_c$ , on a  $(1 - x_c^2)^2 + 9x_c^2 = 2$  avec  $x_c = RC\omega_c$

$$\rightarrow x_c = \sqrt{\frac{\sqrt{53}-7}{2}} \sim 0,37 \rightarrow f_c = \frac{x_c}{2\pi RC} \sim 60 \text{ Hz} \quad \text{La condition exigée en Q18 est vérifiée.}$$



$$v_d = \frac{1/jC\omega}{R + jL\omega + 1/jC\omega} v_i \rightarrow \frac{v_d}{v_i} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

$$\rightarrow \frac{v_d}{v_i} = \frac{1}{1 + 2jmx - x^2} \quad \text{Avec } x = \sqrt{LC}\omega \text{ et } 2m = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 1$$

Plus précisément, à la pulsation de coupure  $\omega_c$ , on a  $(1 - x_c^2)^2 + x_c^2 = 2$

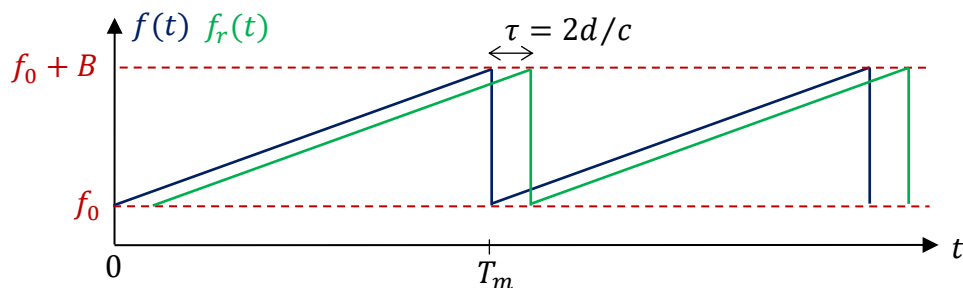
$$\rightarrow x_c = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \sim 1,3 \rightarrow f_c = \frac{x_c}{2\pi RC} \sim 200 \text{ Hz} \quad \text{La condition exigée en Q18 est vérifiée.}$$

**21)**  $v_{iQ} = \alpha(\sin(2\pi(f_2 - f_1)t + \varphi_0) - \sin(2\pi(f_2 + f_1)t + \varphi_0)) \rightarrow v_{dQ} = \alpha \sin(2\pi(f_2 - f_1)t + \varphi_0)$

Puisque  $v_d = \alpha \cos(2\pi(f_2 - f_1)t + \varphi_0)$ , on peut affirmer que si  $v_d$  est en quadrature avance par rapport à  $v_{dQ}$ , alors  $f_2 > f_1$  et au contraire, si  $v_d$  est en quadrature retard par rapport à  $v_{dQ}$ , alors  $f_2 < f_1$ .

**22-23)**  $f(t) = f_0 + \frac{Bt}{T_m}$

$$\tau = \frac{2d}{c} = 66 \mu\text{s} \ll T_m$$



**24)** Si on écarte les très courts instants de durée  $\tau$  pendant lesquels  $f_r(t) > f(t)$ , le signal  $v_d$  a pour

$$\text{fréquence } f(t) - f_r(t) = f_0 + \frac{Bt}{T_m} - \left(f_0 + \frac{B(t-\tau)}{T_m}\right) = \frac{B\tau}{T_m} = \frac{2Bd}{T_m c} \rightarrow d = \frac{f_d T_m c}{2B}$$

**25)** L'échantillonnage s'apparente à une multiplication de  $v(t)$  par une série d'impulsions (0 ou 1), de valeur moyenne non nulle et de fréquence  $f_e = \frac{1}{T_e}$ . Le spectre du signal qui en découle possède (entre autres) les fréquences  $f_i$  présentes dans  $v(t)$  et les fréquences  $f_e - f_i$ . Pour **éviter tout chevauchement** entre les fréquences  $f_i$  désirées et les autres, il faut que la condition de Shannon-Nyquist soit vérifiée :

$$f_e - \max(f_i) > \max(f_i) \rightarrow f_e > 2 \max(f_i)$$

Un filtre passe-bas anti chevauchement est souvent nécessaire pour imposer une fréquence maximale.

Le phénomène de repliement du spectre correspond au cas extrême où  $f_e - f_i < 0$ . Si le chevauchement est évité, à fortiori le repliement l'est aussi !

[Pour plus de détails, on se reportera à l'annexe du Cours Echantillonnage et conversions d'un signal.]

**26)** La précision en fréquence correspond à l'écart entre deux fréquences  $f_k$  successives, c'est-à-dire  $\frac{1}{N_e T_e}$ .

Pour le spectre de gauche,  $(\delta f)_G = 5 \text{ Hz}$  : Les fréquences  $f_1$  et  $f_2$  sont restituées et distinguées.

Pour le spectre de droite,  $(\delta f)_D = 20 \text{ Hz}$  : Seule la fréquence  $f_2$  est restituée, le terme de fréquence  $f_1$  se répartissant principalement sur les valeurs 140 Hz et 160 Hz. Il en est de même pour le bruit qui possède théoriquement un spectre continu. Ses composantes spectrales se concentrent sur les fréquences accessibles (tous les 20 Hz) et donnent ainsi au spectre une allure faussée avec surestimation du bruit.

En conclusion, le critère de Shannon-Nyquist est nécessaire mais une fois la fréquence d'échantillonnage correctement choisie, il faut s'assurer que le nombre de prélèvements soit suffisant.

[Le seul souci par la suite serait de prendre des points trop proches les uns des autres. Ils encombreraient la mémoire inutilement. Voir TP 1 C.A.N. & C.N.A. Paragraphe 2.a].

**27)** D'après le critère de Shannon-Nyquist,  $|f_r - f|_{\max} = \frac{1}{2T_m} = 1,91 \text{ Hz} \rightarrow |f_D|_{\max} = 1,35 \text{ Hz}$

On en déduit que la vitesse maximale mesurable est  $|v_x|_{\max} = \frac{c|f_D|_{\max}}{2f} = 6,78 \text{ m.s}^{-1}$

**28)**  $\delta f = \frac{1}{NT_m} = 9,32 \cdot 10^{-4} \text{ Hz} \rightarrow \Delta v_x = \left| \frac{v_x}{f_D} \right| = \frac{c}{2f} \delta f = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$

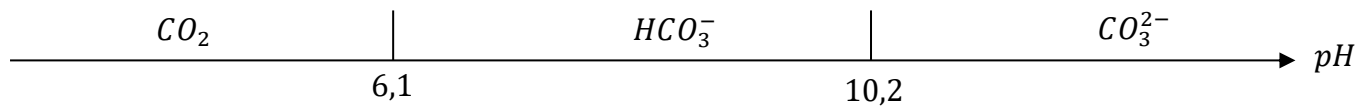
**29)** Toujours d'après le critère de Shannon-Nyquist,  $f_{d,\max} = \frac{M}{2T_m} \rightarrow M = \left\lceil \frac{4Bd_{\max}}{c} \right\rceil = 84$

**30)**  $\delta f_d = \frac{1}{T_m} = 3,82 \text{ Hz} \rightarrow \Delta d = \frac{c}{2B} = 1,2 \text{ km}$

Pour obtenir les résolutions de 0,6 km ou 0,3 km, il faudrait que l'utilisateur puisse multiplier la valeur de  $B$  par 2 ou 4. Si le radar fonctionne à  $M$  constant, la portée maximale sera alors divisée par 2 ou 4.

En fait, le rapport  $\frac{\Delta d}{d_{\max}}$  est fixé par  $M$ , il vaut environ  $\frac{2}{M} \sim 2,4 \%$ .

31) L'espèce prédominante à  $pH = 8,1$  est l'ion hydrogénocarbonate  $HCO_3^-$ .



32-33)  $K = \frac{1}{[Ca^{2+}]_{\text{éq}}[HCO_3^-]_{\text{éq}}[HO^-]_{\text{éq}}} = \frac{K_{a2}}{K_{s1}K_e} = 10^{12,2}$  D'après le tableau,  $[Ca^{2+}] = 9,9 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$

$[HCO_3^-] = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$  et  $[HO^-] = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$

$\rightarrow Q_r = \frac{1}{[Ca^{2+}][HCO_3^-][HO^-]} = 10^{10,5} < K$  Les conditions sont réunies pour que la réaction se produise.

Il y a une légère ambiguïté : Est-ce que les concentrations données par le tableau sont des valeurs initiales (*Sel introduit*) ou des valeurs d'équilibre définitives (*Composition d'une eau de mer*) ? Supposons que nous sommes dans le second cas, on peut alors affirmer que la réaction est cinétiquement bloquée.

34) Initialement,  $[Mg^{2+}] = 5,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$  Or  $K_{s2} = [Mg^{2+}][HO^-]^2$

Le précipité apparaîtra lorsque  $[HO^-] = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1} \rightarrow pH = 9,2$

35)  $O_2 + 4e^- + 4H^+ \rightleftharpoons 2H_2O$   $E_1 = 1,23 + \frac{0,06}{4} \log(0,2) - 0,06 * 8,1 = 0,73 \text{ V}$

36)  $2H^+ + 2e^- \rightleftharpoons H_2$   $E_2 = -0,06 * 8,1 = -0,49 \text{ V}$

37-38) Dans le domaine (a), on assiste à la **réduction du dioxygène** dissout ( $O_2 + 4e^- + 2H_2O \rightleftharpoons 4HO^-$ ) avec un **palier de diffusion** dont le niveau est proportionnel à la concentration en dioxygène dissout.

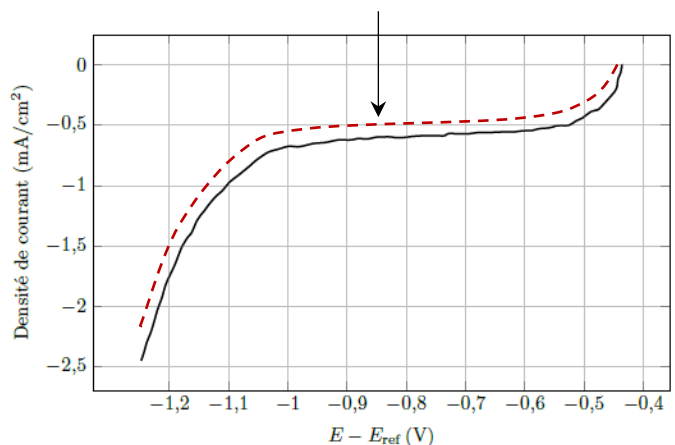
Si celle-ci était plus faible, la courbe serait modifiée ainsi.

Dans le domaine (b), on reconnaît l'un des deux murs du solvant, celui lié à la **réduction de l'eau** ( $2H_2O + 2e^- \rightleftharpoons H_2 + 2HO^-$ ). La réduction du dioxygène dissout se poursuit également.

Pour les deux réactions, on constate un blocage cinétique qui se traduit par deux surtensions cathodiques importantes :

$$\eta_{C,1} = -0,45 - 0,73 = -1,18 \text{ V}$$

$$\eta_{C,2} = -1,00 + 0,49 = -0,51 \text{ V}$$

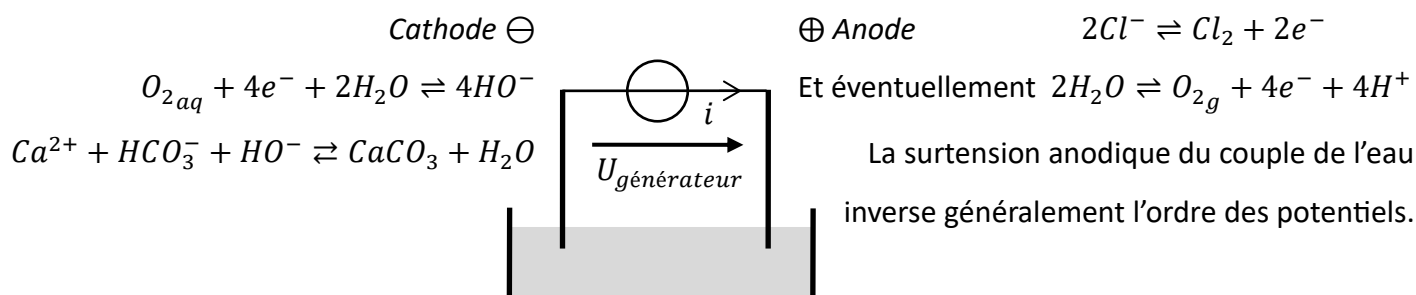
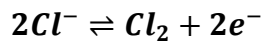
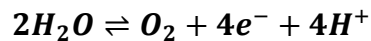


**39)** La précipitation du carbonate de calcium est thermodynamiquement spontanée à  $pH = 8,1$  contrairement à celle de l'hydroxyde de magnésium qui nécessite un  $pH > 9,2$ .

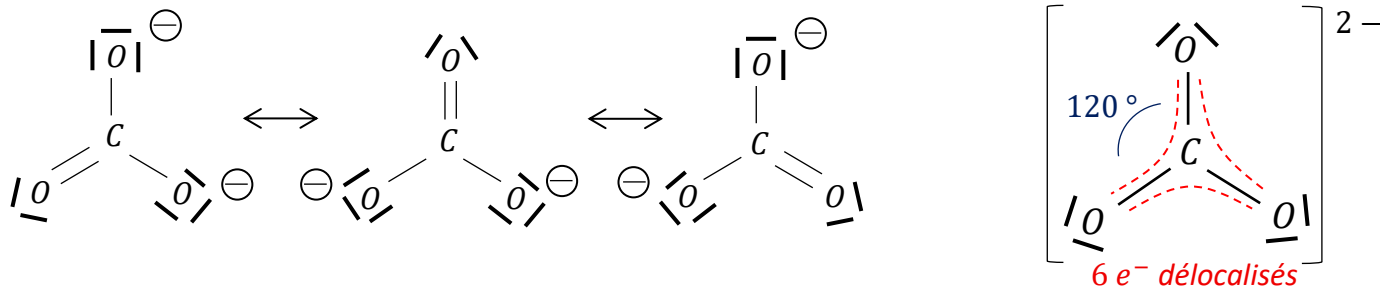
Si  $E - E_{ref} = -0,80 V$ , la lente réduction du dioxygène accompagnée **d'une faible production d'ions  $HO^-$**  au voisinage de la cathode lève le blocage cinétique et entraîne la formation du dépôt de  $CaCO_3$ .

Si  $E - E_{ref} = -1,10 V$ , la vive réduction de l'eau a pour conséquence **une nette augmentation du  $pH$**  au voisinage de l'électrode. Ainsi, l'hydroxyde de magnésium précipite et se mêle au carbonate de calcium.

**40-41)** A l'anode, deux réactions d'oxydation sont envisageables, celle de l'eau en dioxygène et celle de l'ion chlorure en dichlore :



**42-43)** L'atome de carbone est environné de **3 atomes d'oxygène** et ne possède **aucun doublet d'électron non liant**. La structure est trigonale plane afin de minimiser les interactions entre les électrons de valence.



**44)** Les interactions **ioniques de type électrostatique** entre les cations  $Ca^{2+}$  et les atomes d'oxygène sont à l'origine de la cohésion de l'aragonite.

**45)** La maille orthorhombique (et non rhomboédrique) de l'aragonite contient quatre groupements  $CaCO_3$

donc la masse volumique de l'aragonite est  $\rho' = \frac{4M(CaCO_3)}{abc N_A} = 2,93 g.cm^{-3} > \rho$

En effet, à basse pression, l'aragonite qui est plus dense que la calcite, est moins stable.