CCINP ph 2025

1) Le référentiel géocentrique admet pour point fixe **le centre de masse de la Terre** et a ses axes dirigés vers **trois étoiles lointaines**. Il est en translation par rapport au référentiel Héliocentrique.

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel **la 1ère loi de Newton** (principe d'inertie) est vérifiée : Tout point matériel pseudo isolé est au repos ou possède un mouvement rectiligne uniforme.

2) Tous les plans contenant la droite OM sont des plans de symétrie pour la distribution de masse donc des plans de symétrie pour le champ $\vec{\mathcal{G}}(M)$. Ainsi, $\vec{\mathcal{G}}(M)$ appartient à tous ces plans → $\boldsymbol{\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(M)\,\vec{u}}$

La distribution est à symétrie sphérique donc la norme du champ ne dépend que de r : $\boldsymbol{\mathcal{G}(M) = \mathcal{G}(r)}$

D'après le théorème de Gauss gravitationnel appliqué sur une sphère de centre O et rayon r :

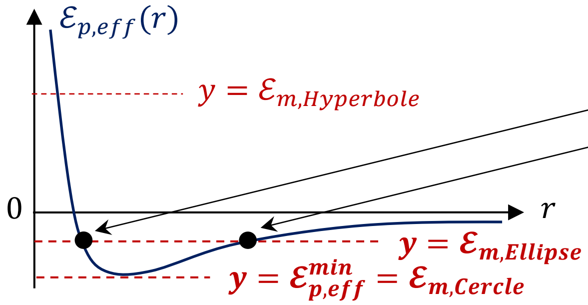
$$4\pi r^2\mathcal{G}(r) = -4\pi G M_T \;\rightarrow\; \boldsymbol{\vec{F}_g(M) = -\frac{GM_Tm}{r^2}\vec{u}}$$

3) On applique le T.M.C. à M en O. Seule $\vec{F}_g$ s'applique et **son moment en O est nul** : $\vec{\mathcal{L}}_O(M) = \overrightarrow{cste}$

Or $\vec{\mathcal{L}}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M)$ donc **$\overrightarrow{OM}$ est orthogonal à un vecteur constant**, le mouvement est plan.

4) Il existe $\mathcal{E}_p(M)$ telle que $\vec{F}_g(M) = -\overrightarrow{grad}\,\mathcal{E}_p$ avec $\boldsymbol{\mathcal{E}_p(r) = -\frac{GM_Tm}{r}}$

5-8) En notant $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$ et $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$, $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_p(r) + \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) = \boldsymbol{-\frac{GM_Tm}{r} + \frac{\mathcal{L}_0^2}{2mr^2} + \underbrace{\frac{m}{2}\dot{r}^2}_{\geq 0} \geq \mathcal{E}_{p,eff}(r)}$



Si $\mathcal{E}_{p,eff}^{min} < \mathcal{E}_m < 0$, la trajectoire est elliptique.

Au périgée et à l'apogée de l'ellipse, $\dot{r} = 0 \rightarrow \mathcal{E}_{p,eff} = \mathcal{E}_m$

Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,eff}^{min}$, la trajectoire est circulaire.

[Si $\mathcal{E}_m > 0$, la trajectoire est hyperbolique.

Si $\mathcal{E}_m = 0$, la trajectoire est parabolique.]

9) D'après la 2ème loi de Newton appliquée au satellite sur sa trajectoire circulaire de vitesse v, $v^2 = \frac{GM_T}{R}$.

$$\mathcal{E}_{m,alt} = -\frac{GM_Tm}{R} + \frac{m}{2}v^2 = -\frac{GM_Tm}{R} + \frac{GM_Tm}{2R} = \boldsymbol{-\frac{GM_Tm}{2R}}$$

10) Soit T, la période de rotation. On a $v^2 = \frac{4\pi^2R^2}{T^2} \rightarrow \boldsymbol{\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}}$

11) En A et P, $\dot{r} = 0 \;\rightarrow\; \mathcal{E}_{m,tr} = -\frac{GM_T m}{R} + \frac{\mathcal{L}_0^2}{2mR^2} = -\frac{GM_T m}{R_c} + \frac{\mathcal{L}_0^2}{2mR_c^2}$

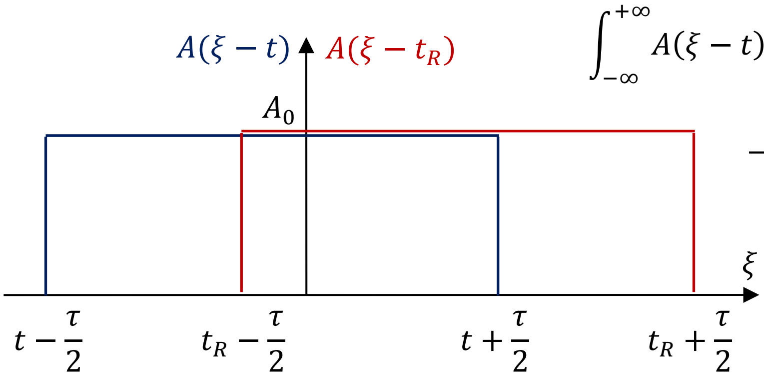
$$\rightarrow\; \mathcal{E}_{m,tr}R^2 + GM_T mR = \mathcal{E}_{m,tr}R_c^2 + GM_T mR_c \;\rightarrow\; \boldsymbol{\mathcal{E}_{m,tr} = -\frac{GM_T m}{R + R_c}}$$

12) $\Delta\mathcal{E}_m = -\frac{GM_T m(R - R_c)}{2(R + R_c)R} < 0$ Cette opération nécessite **un freinage** du satellite.

13) Il faudra de nouveau **freiner** le satellite car $\mathcal{E}_{m,c} = -\frac{GM_T m}{2R_c} < \mathcal{E}_{m,tr}$.

14-15) $\underline{s}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi - t)\exp\left(-2i\pi f_0(\xi - t)\right)\alpha A(\xi - t_R)\exp\left(2i\pi f_0(\xi - t_R)\right)d\xi$

$$\rightarrow\; \boldsymbol{\underline{s}(t) = \alpha\exp\left(2i\pi f_0(t - t_R)\right)\int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi - t)\, A(\xi - t_R)d\xi}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi - t)\, A(\xi - t_R)d\xi = \int_{t_R - \frac{\tau}{2}}^{t + \frac{\tau}{2}} A_0^2\, d\xi = A_0^2(t + \tau - t_R)$$

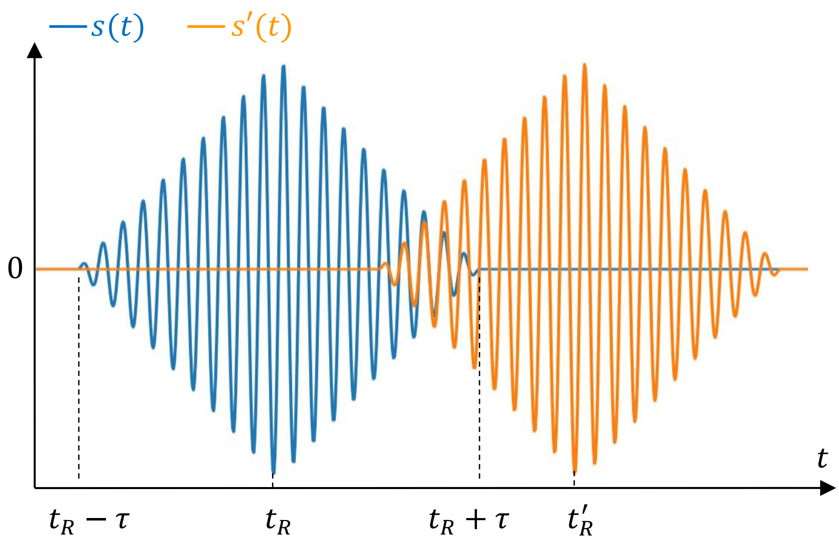
$$\rightarrow\; \boldsymbol{\underline{s}(t) = \alpha\, A_0^2\exp\left(2i\pi f_0(t - t_R)\right)(t + \tau - t_R)}$$

16-17) $s(t) = \alpha\, A_0^2\cos\left(2\pi f_0(t - t_R)\right)(t + \tau - t_R)$ pour $t_R - \tau \leq t \leq t_R$

et $s(t) = \alpha\, A_0^2\cos\left(2\pi f_0(t - t_R)\right)(\tau + t_R - t)$ pour $t_R \leq t \leq t_R + \tau$

$s'(t) = \alpha\, A_0^2\cos\left(2\pi f_0(t - t'_R)\right)(t + \tau - t'_R)$ pour $t'_R - \tau \leq t \leq t'_R$

et $s'(t) = \alpha\, A_0^2\cos\left(2\pi f_0(t - t'_R)\right)(\tau + t'_R - t)$ pour $t'_R \leq t \leq t'_R + \tau$



Les deux échos sont distingués si

$t'_R - t_R \geq \tau \;\Leftrightarrow\; \frac{2\Delta d}{c} \geq \tau$

$$\boldsymbol{\Delta d_{min} = \frac{c\tau}{2} = 17\ km}$$

C'est beaucoup trop grand, il faut trouver une autre méthode.

18) $\boldsymbol{f_e = f_0 + Kt}$ $\qquad$ $\boldsymbol{f_c = f_0}$ et $\boldsymbol{B = K\tau}$

19) Les deux échos sont distingués si $t'_R - t_R \geq \frac{1}{K\tau} = \frac{1}{B}$ $\rightarrow$ $\Delta \boldsymbol{d_{min}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{2B}} = \boldsymbol{47\ cm}$ $\quad$ C'est bien mieux !

20) La direction de **propagation est $\vec{e}_z$** et la direction de **polarisation est $\vec{e}_x$** .

21) Si les charges sont **non relativistes**, **la force magnétique est négligeable** devant la force électrique car

$\|\vec{F}_m\| \leq e\|\vec{v}\|\|\vec{B}\| \ll ec\|\vec{B}\| \sim e\|\vec{E}\| = \|\vec{F}_e\|$

Car dans une onde électromagnétique, $\|\vec{E}\|$ n'est jamais trop éloigné de $c\|\vec{B}\|$.

22) $i\omega m_e \underline{\vec{v_e}} = -e\underline{\vec{E}} \rightarrow \boldsymbol{\underline{\vec{v_e}} = \frac{-e}{i\omega m_e}\underline{\vec{E}}}$ et $i\omega m_c \underline{\vec{v_c}} = e\underline{\vec{E}} \rightarrow \boldsymbol{\underline{\vec{v_c}} = \frac{e}{i\omega m_c}\underline{\vec{E}}}$

23) $\underline{\vec{j}} = ne\left(\underline{\vec{v_c}} - \underline{\vec{v_e}}\right) = \frac{ne^2}{i\omega}\left(\frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_e}\right)\underline{\vec{E}} \sim \frac{ne^2}{i\omega m_e}\underline{\vec{E}} \rightarrow \boldsymbol{\omega_p = e\sqrt{\frac{n}{m_e \varepsilon_0}}}$

24) L'onde électromagnétique est **transverse** $\left(\vec{k}.\vec{E} = 0\right)$, $div\,\vec{E} = 0 \rightarrow \rho = 0$

25) $\boldsymbol{-i\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0}$ $\qquad$ $\boldsymbol{-i\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0}$ $\qquad$ $\boldsymbol{-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega\underline{\vec{B}}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0\underline{\gamma}\underline{\vec{E}} + i\frac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}}$

$$-i\vec{k} \wedge \left(-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}\right) = k^2\underline{\vec{E}} \Leftrightarrow -\omega\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = k^2\underline{\vec{E}} \Leftrightarrow -i\omega\mu_0\underline{\gamma}\underline{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{E}} = k^2\underline{\vec{E}} \rightarrow \boldsymbol{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

26-27) Nous sommes en présence d'une onde **évanescente**, c'est-à-dire d'une onde stationnaire amortie.

$\boldsymbol{k = -i\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}}$ car ainsi, il y a bien amortissement selon l'axe Oz vertical descendant.

$$\boldsymbol{\vec{E} = E_0 \exp\left(-\frac{z - z_0}{\delta}\right)\cos(\omega t)\,\vec{e}_x} \qquad \text{Avec} \quad \boldsymbol{\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}}$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, $\boldsymbol{\vec{B} = \frac{E_0}{\delta\omega}\exp\left(-\frac{z - z_0}{\delta}\right)\sin(\omega t)\,\vec{e}_y}$

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ a une **valeur moyenne nulle** : Il n'y a pas de propagation de l'énergie.

28-29) A présent, l'onde est **progressive**, $\boldsymbol{k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}}$ car ainsi, il y a bien propagation selon l'axe Oz.

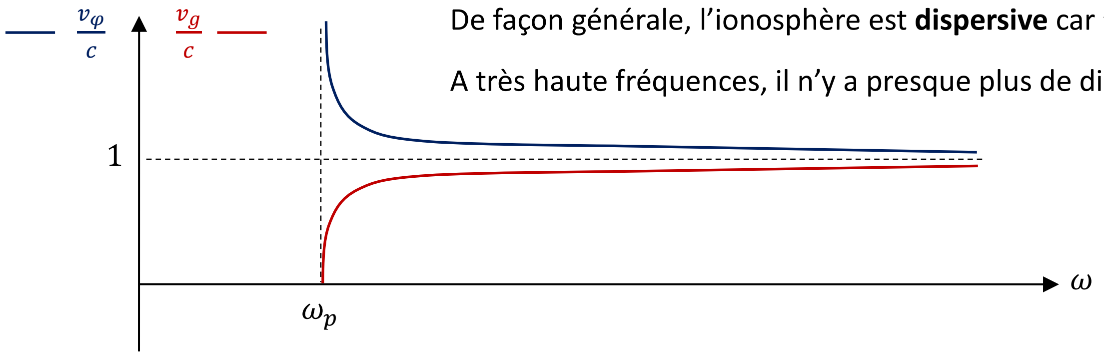
$$\boldsymbol{\vec{E} = E_0\cos\big(\omega t - k(z - z_0)\big)\,\vec{e}_x} \qquad \boldsymbol{\vec{B} = \frac{kE_0}{\omega}\cos\big(\omega t - k(z - z_0)\big)\,\vec{e}_y}$$

Pour la propagation, le plasma se comporte comme un filtre **passe-haut** de pulsation de coupure $\boldsymbol{\omega_p}$**.**

30) D'après la figure 9, $n_{max} = 10^{12}\ m^{-3} \ \rightarrow\ \boldsymbol{f_p^{max} = 9\ MHz}$

Aux fréquences utilisées, la propagation est assurée. En choisissant $f_0 \gg f_p^{max}$, le signal est moins déformé car le phénomène de dispersion s'atténue à très haute fréquence (voir ci-dessous).

31-32) $\boldsymbol{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1-\omega_p^2/\omega^2}}}$ $\qquad 2kdk = \frac{2\omega}{c^2}d\omega \ \rightarrow\ v_\varphi v_g = c^2 \ \rightarrow\ \boldsymbol{v_g = c\sqrt{1\ -\ \omega_p^2/\omega^2}}$



De façon générale, l'ionosphère est **dispersive** car v_φ dépend de ω.

A très haute fréquences, il n'y a presque plus de dispersion.

33) Les impulsions se déplacent à la vitesse de groupe : $\Delta t = \frac{2l}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\omega_p^2/\omega_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\omega_p^2/\omega_0^2}}\right) \sim \boldsymbol{\frac{l\omega_p^2(\omega_0^2-\omega_1^2)}{c\omega_1^2\omega_0^2}}$

34-35) $t_0 = \frac{2(d-l)}{c} + \frac{2l}{c\sqrt{1-\omega_p^2/\omega_0^2}} \rightarrow d = \frac{ct_0}{2} + l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\omega_p^2/\omega_0^2}}\right) \sim \frac{ct_0}{2} - \frac{l\omega_p^2}{2\omega_0^2} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon = \frac{c\Delta t\omega_1^2}{2(\omega_0^2-\omega_1^2)} = \frac{lne^2}{2\omega_0^2 m_e \varepsilon_0}}$

$$\rightarrow\ \boldsymbol{\varepsilon = 5,4\ cm}$$

Cela peut sembler dérisoire mais vue la précision exigée par l'enjeu de l'étude, l'erreur doit être corrigée.

36) D'après la relation de passage en $x = 0$, $E_0 \exp(i\omega t)\,\vec{e}_z + E'_{0y}\exp(i\omega t)\,\vec{e}_y + E'_{0z}\exp(i\omega t)\,\vec{e}_z = \vec{0}\ \ \forall t$

$$\rightarrow\ E'_{0y} = 0 \ \text{ et }\ E'_{0z} = -E_0 \ \ \rightarrow\ \boldsymbol{\underline{\vec{E}_r}(M,t) = -E_0 \exp\big(i(\omega t + kx)\big)\,\vec{e}_z}$$

37) $\underline{\vec{B}_i}(M,t) = \frac{\vec{e}_x \wedge \underline{\vec{E}_i}}{c} = -\frac{E_0}{c}\exp\big(i(\omega t - kx)\big)\,\vec{e}_y$ et $\underline{\vec{B}_r}(M,t) = -\frac{\vec{e}_x \wedge \underline{\vec{E}_r}}{c} = -\frac{E_0}{c}\exp\big(i(\omega t + kx)\big)\,\vec{e}_y$

Ainsi, $\boldsymbol{\underline{\vec{B}}(x = 0^-,t) = -\frac{2E_0}{c}\exp(i\omega t)\,\vec{e}_y} \ \rightarrow\ \underline{\vec{j}_s}(t) = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\exp(i\omega t)\,\vec{e}_z \ \rightarrow\ \boldsymbol{\vec{j}_s(t) = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos(\omega t)\,\vec{e}_z}$

38) $\delta\vec{F}_L = ady\,\vec{j}_s(t) \wedge \vec{B}_i(x = 0^-,t) \ \rightarrow\ \boldsymbol{\vec{F}_L = a^2\,\vec{j}_s(t) \wedge \vec{B}_i(x = 0^-,t)}$

39-40) $\vec{F}_L = \frac{2a^2E_0^2}{\mu_0 c^2}\cos^2(\omega t)\,\vec{e}_x \ \rightarrow\ \boldsymbol{P_m = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} = \frac{2I}{c}}$ $\qquad$ Car $I = \langle\|\vec{\Pi}_i\|\rangle = \left\langle\left\|\frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0}\right\|\right\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$

D'après la 2ème loi de Newton, $P_m S = \frac{mg}{10^3} \ \rightarrow S = \frac{mgc}{2.10^3\ I} = \boldsymbol{3.10^6\ m^2} = 300\ ha \sim 400$ terrains de foot !

C'est énorme ! Cela soulève de grandes difficultés pour le déploiement et le contrôle d'orientation.

41) $\vec{r}(M) = r\vec{e}_r$ $\quad$ $\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ $\quad$ $\vec{a}(M) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$

42) La résultante des forces est composée de la force gravitationnelle (Q2) $\vec{F}_g = -\frac{GM_T m}{r^2}\vec{e}_r$ et de $\vec{F}_p$.

Ainsi, $F_r = -\frac{GM_T m}{r^2} + L(r,\theta)P_m S\cos^2(\varphi)\cos(\varphi - \theta)$ et $F_\theta = L(r,\theta)P_m S\cos^2(\varphi)\sin(\varphi - \theta)$

43) D'après la 2ème loi de Newton, $m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F_r$ et $m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) = F_\theta$.

Et en effet, puisque $\dot{r} = v_r$ et $\dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r}$ $\rightarrow \dot{v}_r = \frac{F_r}{m} + \frac{v_\theta^2}{r}$ et $\dot{v}_\theta = \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{F_\theta}{m} - \dot{r}\dot{\theta} = \frac{F_\theta}{m} - \frac{v_r v_\theta}{r}$

44) La seule énergie potentielle prise en compte dans $\mathcal{E}_m$ est gravitationnelle : $\mathcal{E}_m = \frac{m}{2}\left(v_r^2 + v_\theta^2\right) - \frac{GM_T m}{r}$

45) $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \vec{F}_p.\vec{v} = \underbrace{P_m S}_{K_m} L(r,\theta)\cos^2(\varphi)\left(v_r\cos(\varphi - \theta) + v_\theta\sin(\varphi - \theta)\right)$

46-49) Instruction 1 $\quad$ $\mathbf{T = np.arange(0, tmax, dt)}$ $\quad$ $n = \left\lceil \frac{t_{max}}{dt} \right\rceil$

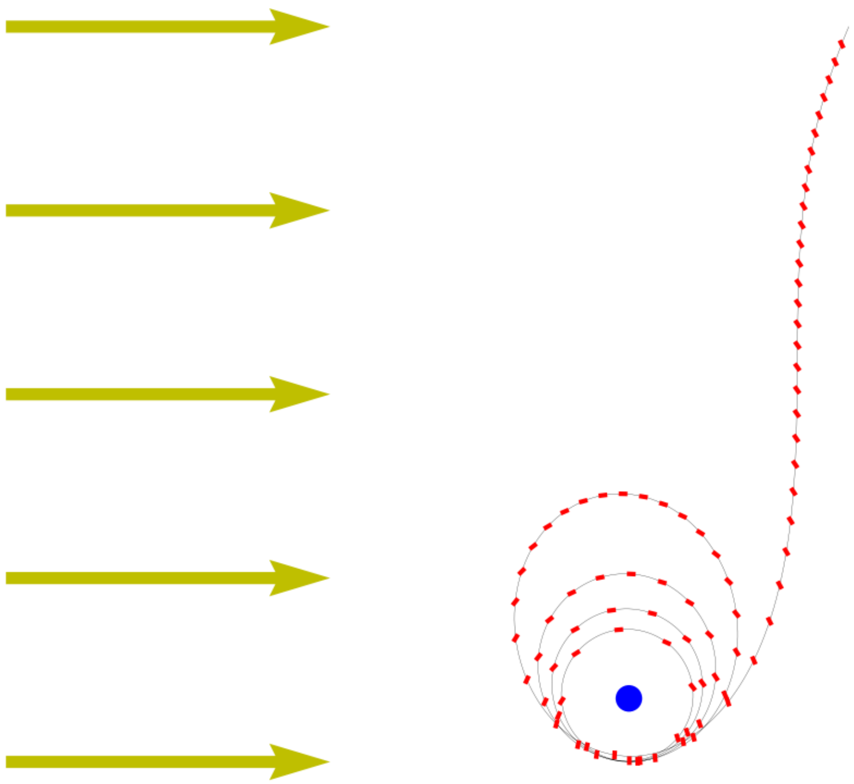
```
N=np.ceil(np.pi/4e-3) #Le pas de progression de phi est 4e-3 radian
N=N.astype(int) #Transformation en entier pour le module linspace
def recherche_phi_optimal(vr,vth,theta):
    liste_phi=np.linspace(-np.pi/2,np.pi/2,N)
    dEm=np.cos(liste_phi)**2*(vr*np.cos(liste_phi-theta)+vth*np.sin(liste_phi-theta))
    x=liste_phi[0]
    y=dEm[0]
    for i in range(1,786):
        if y<dEm[i]:
            y=dEm[i]
            x=liste_phi[i]
    return x
```

La fonction détermine l'angle φ optimal avec l'intervalle de confiance $\pm 2.10^{-3}\,rad$.

```
def derivees_comp_vitesse(r,theta,vr,vth,phi):
    if abs(r*np.sin(theta))<RT and np.cos(theta)>0:
        x=-G*MT/r**2+vth**2/r
        y=-vr*vth/r
    else:
        x=-G*MT/r**2+Km*np.cos(phi)**2*np.cos(phi-theta)/m+vth**2/r
        y=Km*np.cos(phi)**2*np.sin(phi-theta)/m-vr*vth/r
    return x,y
```

Instruction 2

```
theta+=vth*dt/r #Ordonner les instructions afin d'effectuer du 100% explicite
r+=vr*dt
vr+=vr_pt*dt
vth+=vth_pt*dt
```



50) Dans la situation $x \sim 0$ et $y > 0$, le vaisseau se dirige vers le Soleil, le rayonnement est de face ! Pour éviter tout freinage, il faut aligner la voile dans le sens du déplacement pour que **l'incidence soit rasante** $\left(\alpha = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$.

51) La vitesse v_{lib} est la vitesse minimale permettant de se libérer de l'attraction terrestre dans le cadre d'étude d'un système conservatif. Or l'état libre correspond à une énergie mécanique positive ou nulle donc

$$\mathcal{E}_m = \frac{m}{2} v^2(r) - \frac{GM_T m}{r} \geq 0 \rightarrow \boldsymbol{v_{lib}(r)} = \sqrt{\frac{2GM_T}{r}}$$

52) $\mathcal{E}_m = \frac{m}{2} v^2(r) - \frac{m}{2} v_{lib}^2(r) < 0 \rightarrow \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v_{lib}}} = \sqrt{\boldsymbol{1} + \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}_m r}}{\boldsymbol{GM_T m}}} = \sqrt{\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{|\mathcal{E}_m| r}}{\boldsymbol{GM_T m}}} < \boldsymbol{1}$

A $\mathcal{E}_m = cste$, ce rapport oscille, il est maximal au périgée (r minimal) et minimal à l'apogée (r maximal).

Avec la voile on assiste à une augmentation de $\mathcal{E}_m$ ($|\mathcal{E}_m| \searrow$), ce qui rend à coup sûr le rapport $\frac{v}{v_{lib}}$ de plus en plus grand au « périgée » ($r_{min} \sim cste$). Par contre, il n'est pas facile de prévoir que le rapport $\frac{v}{v_{lib}}$ est de plus en plus petit à « l'apogée » : l'augmentation de r_{max} semble l'emporter.