Banque CCINP : Ex. 19, 20, 21, 22, 23, 24, 47, 51 (trop d'exercices, en travailler 4 cette semaine).

Rayon de convergence

Exercice 1. Déterminer le rayon de CV des séries entières suivantes :

a) $\sum \frac{n^2+1}{3^n} z^n$.

b) $\sum e^{-n^2} z^n$.

c) $\sum \ln(n!) z^n$.

d) $\sum (\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}) z^n$.

e) $\sum \frac{\cos(n)}{n^\alpha} z^n$.

f) $\sum \tan(n\pi/11) z^n$

Exercice 2 (Série à exposants lacunaires)**.** Quel est le rayon de convergence de $\sum n! z^{n^2}$.

Méthode pour ces séries : Appliquer d'Alembert pour les séries numériques à $\sum u_n$ où $u_n = n! z^{n^2}$.

Exercice 3 (Cas où a_n est défini par une intégrale)**.** a) Rayon de CV de $\sum a_n z^n$ si $a_n = \int_n^{2n} \frac{e^t}{t} dt$.

b) Etude de la convergence de $\sum a_n x^n$ pour x au bord de l'intervalle de convergence.

Exercice 4. On dit que deux série entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont des ensembles d'indices disjoints ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ ou $b_n = 0$. On note R_a (resp. R_b) le rayon de CV de la première (resp. de la seconde). Montrer que la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de CV $\min(R_a, R_b)$.

Fonctions sommes de séries entières

Exercice 5 (Exemple de base, (un peu trop particulier néanmoins))**.**

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

a) Justifier que f est bien définie et est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

b) Justifier que f est continue en -1.

c) Le prolongement est-il dérivable en -1 ?

Exercice 6 (Comportement au bord, cas où tous les termes sont positfs)**.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence 1 et telle que $\sum a_n$ diverge.

Que dire du comportement de $f(x)$ quand $x \to 1$?

Exercice 7. On fixe un nombre $R > 0$. Montrer que pour n assez grand, les zéros du polynôme $P_n(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$ sont tous de module supérieur à R.

Exercice 8. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On conviendra, si $R = +\infty$, que $1/R = 0$.

a) Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ admet un rayon de convergence infini.

b) On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. On note $L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tx} dt$ la transformée de Laplace de f.

Montrer que pour tout $x > 1/R$, $L(f)(x)$ est bien définie puis que $L(f)(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^n}$.

Remarque 1 : la même formule se réécrit : $\forall\ x \in]-R,R[$, $\int_0^{+\infty} f(ux) e^{-u} du = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

c) En déduire une expression simple de $L(f)$ pour le sinus cardinal $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$.

Calcul de sommes de séries entières

Exercice 9 (En découpant pour se ramener à reconnaître des D.S.E. de fonctions usuelles)**.**

a) Calculer le rayon de convergence et la somme de $\sum \frac{x^n}{n(n+1)}$.

b) Calculer le rayon de convergence et la somme de $\sum \frac{2\,\mathrm{sh}(n)}{n(n+1)} x^n$.

Exercice 10 (En trouvant une E.D. vérifiée par la fonction...)**.** Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$ pour les x réels pour lesquelles cette somme est bien définie.

Développement en série entière

Exercice 11. a) Montrer que $f\ :\ x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est D.S.E. sur l'intervalle $]-1,1[$ et expliciter ce développement.

b) En déduire que la fonction arcsin est D.S.E. sur l'intervalle $]-1,1[$ et expliciter son développement.

Exercice 12. Développer la fonction $f\ :\ x\mapsto\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ en série entière, sur un voisinage de 0 à préciser.

Pour éviter un produit de Cauchy, on pourra transformer l'expression de f avec la quantité conjuguée

Exercice 13. D.S.E. de $f\ :\ x\mapsto\cos(x)\,\mathrm{ch}(x)$ si possible de deux manières différentes (avec et sans produit de Cauchy).

Exercice 14. Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction f définie par $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}dt$ en considérant une équation différentielle vérifiée par f.

Exercice 15. a) Calculer explicitement, pour $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, $I_{n,p}=\displaystyle\int_0^1 t^n(\ln(t))^p dt$.

b) Soit $f\ :\ x\mapsto\displaystyle\int_0^1 t^{xt}dt$. Montrer que f est D.S.E. au voisinage de 0 et expliciter ce développement.

Exercice 16 (Démonstration du théorème d'Abel radial et un peu plus)**.** 1) Dans cette question on va démontrer le

> **Théorème de convergence uniforme radiale :** On considère $(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_nz^n$ soit de rayon de convergence $R>0$.
> On suppose que la série numérique $\sum a_nR^n$ converge (pas forcément absolument !).
> On pose pour tout $n\in\ \mathbb{N}$, $u_n\ :\ [0,R]\to\mathbb{C}$, $x\mapsto a_nx^n$. On sait que $\sum u_n$ CVS sur $[0,R]$.
> En fait : $\sum u_n$ CVU sur $[0,R]$.

a) Justifier qu'il suffit de démontrer ce théorème dans le cas où $R=1$.

On se place donc dans les hypothèse du 1) avec $R=1$.

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1]$ on pose $\rho_n(x)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_kx^k$ et $r_n=\rho_n(1)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k$.

La transformation d'Abel (I.P.P. discrète) : montrer que pour tout $x\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_kx^k=r_nx^{n+1}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}r_k(x^{k+1}-x^k).$$

Indication – Pour vraiment comprendre le processus d'I.P.P. discrète et prouver cette égalité de gauche à droite, penser à écrire $a_k=r_{k-1}-r_k$.

c) En déduire que si on note $\varepsilon_n:=\sup_{k\geq n}|r_k|$, on a :

$$\forall\,x\in[0,1],\ |\sum_{k=n+1}a_kx^k|\leq 2\varepsilon_n$$

d) Conclure pour la convergence uniforme annoncée.

2) Déduire du théorème du 1) le théorème de continuité du cours.

Séries entières matricielles

Exercice 17. a) On considère une série entière $\sum a_nz^n$ de rayon de convergence $R>0$ avec $(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Soit $A\in M_q(\mathbb{C})$. On note $\rho(A)$ le max. des modules des v.p. de A.
Montrer que si $\rho(A)>R$ alors la série $\sum a_nA^n$ diverge grossièrement. i.e. $(a_nA^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

b) Le sens difficile : on va montrer que si $\rho(A)<R$, la série $\sum a_nA^n$ converge.
On sait (en décomposant A sur les s.e.v. caractéristiques), qu'on peut écrire $A=D+N$ avec D diagonalisable et N nilpotente et $DN=ND$.

i) On note $S_n(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ et pour $|z|<R$, $f(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}a_kz^k$. Justifier que si $\rho(A)<R$, la suite $(S_n(D))$ converge. On note encore $f(D)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}a_kD^k$ sa limite.

ii) En déduire le résultat annoncé.