

1) Si on assimile la trajectoire d'un satellite de Jupiter à un cercle de rayon  $R_i$  parcouru en une période  $T_i$ , la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler stipule que le rapport  $\frac{R_i^3}{T_i^2} = \frac{GM_J}{4\pi^2}$  est une constante indépendante du satellite.

D'après les données, la loi est vérifiée et la moyenne  $\langle \frac{R_i^3}{T_i^2} \rangle = 3,21 \cdot 10^{15} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \rightarrow M_J = 1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

L'écart (3,5 %) est relativement important alors que la loi est particulièrement bien vérifiée ... ?

$$2-3) \quad \mu_J = \frac{3M_J}{4\pi R_J^3} = 1,32 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad \alpha_{max} = \frac{2R_J}{d_J - d_T} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

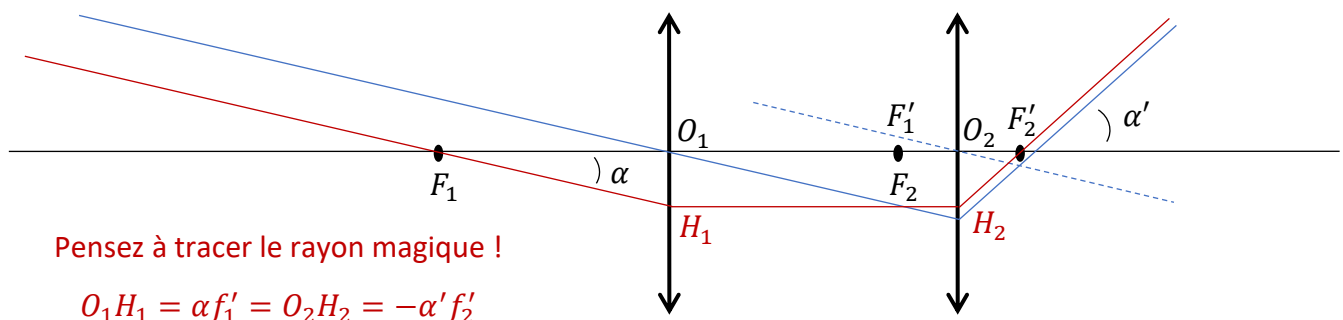
$$4) \quad \text{Toujours d'après la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler, } \frac{d_J^3}{T_J^2} = \frac{d_T^3}{T_T^2} \left( = \frac{GM_\odot}{4\pi^2} \right) \rightarrow T_J = 4,33 \cdot 10^3 \text{ jours}$$

La durée  $\Delta t$  entre deux oppositions vérifie la loi  $\omega_T \Delta t = \omega_J \Delta t + 2\pi \rightarrow \Delta t = \frac{1}{\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_J}} = 3,99 \cdot 10^2 \text{ jours}$

5) L'œil n'accomode pas si l'image définitive donnée par l'oculaire est à **l'infini**. L'objet étant à très grande distance, il faut que le plan focal image de l'objectif coïncide avec le plan focal objet de l'oculaire :

$$O_1 O_2 = f'_1 + f'_2 = 110 \text{ cm} \quad \text{Le système est dit « afocal », il ne possède pas de foyer.}$$

6 & 7) Dans les conditions de Gauss, les rayons lumineux sont **peu inclinés** par rapport à l'axe optique et **peu éloignés** de l'axe optique.  $G = -\frac{f'_1}{f'_2} = -10 \rightarrow |\alpha'| = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 7,6' \text{ Jupiter est vue.}$



8) Il y a conservation de l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m = -\frac{GM_T m}{R_T} + \frac{mv_{R_T}^2}{2} = \frac{mv_\infty^2}{2} \geq 0$ .

$$\mathcal{E}_m \geq 0 \rightarrow v_{R_T} \geq v_l = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T} = 11,2 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

9) Le référentiel jupiterocentrique est galiléen car la durée de l'étude (53 jours) est **très inférieure** à  $T_J$ .

10) On applique le T.M.C. à  $P$  en  $O$ . Le moment en  $O$  de la force gravitationnelle est nul  $\rightarrow \vec{L}_O(P) = \overrightarrow{cste}$ .

Or  $\vec{L}_O(P) = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}(P)$  donc  $\overrightarrow{OP}$  est orthogonal à un vecteur constant, le mouvement est plan.

La position et la vitesse initiales définissent avec  $O$  le plan de la trajectoire  $(O, \overrightarrow{OP}_{t=0}, \vec{v}_{t=0}(P))$ .

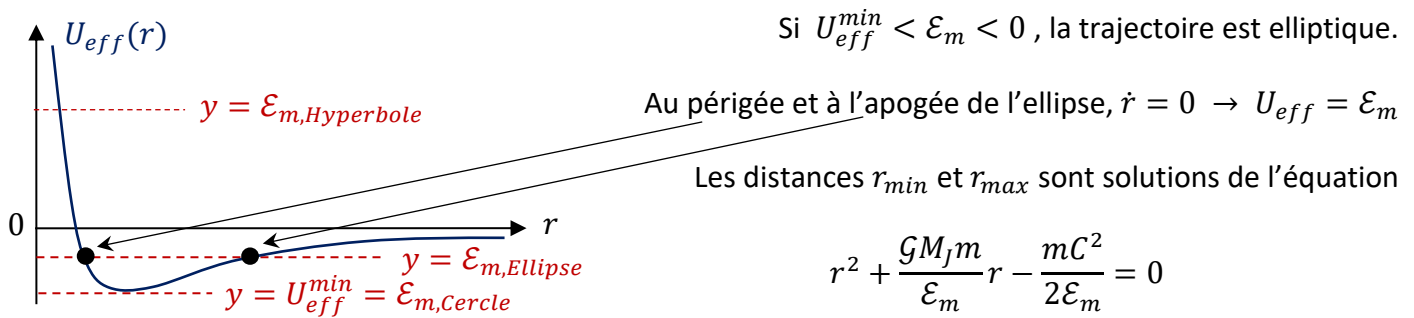
11-12)  $\vec{r} = r \vec{u}_r$      $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$      $\vec{C} = r^2\dot{\theta} \vec{u}_z$  D'après Q11,  $m\vec{C} = \overrightarrow{cste} \rightarrow r^2\dot{\theta} = C = cste$ .

13)  $\mathcal{E}_m = -\frac{GM_J m}{r} + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) = -\frac{GM_J m}{r} + \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{m}{2}\dot{r}^2 = cste$  Car la seule force prise en compte est conservative, aucune autre force non conservative, dissipative d'énergie, n'est considérée.

14-15) L'idée importante est que  $U_{eff}(r) \leq \mathcal{E}_m$ . Les deux états de diffusion correspondent à  $\mathcal{E}_m \geq 0$ .

Si  $\mathcal{E}_m > 0$ , la trajectoire est hyperbolique. Si  $\mathcal{E}_m = 0$ , la trajectoire est parabolique.

Les états liés correspondent à  $\mathcal{E}_m < 0$ . Si  $\mathcal{E}_m = U_{eff}^{min}$ , la trajectoire est circulaire.



$$\rightarrow r_{min} + r_{max} = 2a = -\frac{GM_J m}{\mathcal{E}_m} \rightarrow \mathcal{E}_m = -\frac{GM_J m}{2a} \quad \text{et} \quad r_{min} r_{max} = -\frac{mC^2}{2\mathcal{E}_m}$$

Encore une fois, d'après la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler,  $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_J}{4\pi^2} \rightarrow a = 4,1 \cdot 10^9 \text{ m}$

16-17)  $\vec{F}_{grav} = m\vec{G}(P)$      $div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$      $\overrightarrow{rot} \vec{E} = \vec{0}$

La différence fondamentale entre l'électrostatique et la gravitation est que la densité de charge volumique  $\rho$  peut être négative contrairement à la densité de masse volumique  $\mu$ .

18)  $\overrightarrow{rot} \vec{G} = \vec{0} \rightarrow \exists \Phi$  tel que  $\vec{G} = \pm \overrightarrow{grad} \Phi$  Ainsi,  $\Delta\Phi = 4\pi G\mu$  à condition que  $\vec{G} = -\overrightarrow{grad} \Phi$ .

19) Le flux sortant de  $\vec{E}$  à travers une surface fermée est égal à la charge contenue dans cette surface divisée par  $\epsilon_0$ . La grandeur " $-4\pi G$ " étant l'analogue de " $\frac{1}{\epsilon_0}$ ", on aboutit à la relation (5).

**20)** La distribution de masse ne dépend que de  $r$ , la norme de  $\vec{G}$  ne dépend que de  $r$ .

Tout plan contenant  $\overrightarrow{OP}$  est un plan de symétrie pour la distribution donc un plan de symétrie pour  $\vec{G}(P) \rightarrow \vec{G}(P)$  appartient à ces plans :  $\vec{G}(P) = -G(r) \vec{u}_r$

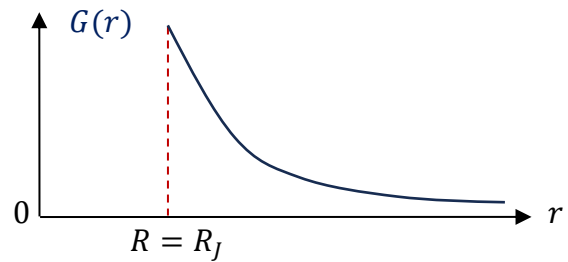
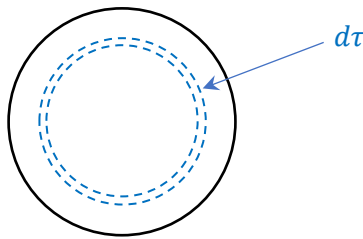
**21)** On choisit l'élément de volume inter sphère  $4\pi r'^2 dr' \rightarrow M(r) = \iiint \mu d\tau = \int_0^r \mu(r') 4\pi r'^2 dr'$

En effet, grâce à la symétrie sphérique, en première approche, le volume élémentaire  $d\tau$  peut être vu comme le produit de l'aire de la sphère de rayon  $r'$  ( $4\pi r'^2$ ) par l'épaisseur  $dr'$ .

Si on veut être plus explicite, on signale que  $d\tau$  est le volume de la sphère de rayon  $r' + dr'$  amputé du volume de la sphère de rayon  $r' \rightarrow d\tau = \frac{4}{3}\pi((r' + dr')^3 - r'^3) = 4\pi r'^2 dr'$  au premier ordre en  $dr'$ .

Enfin, si on est perfectionniste, on revient à  $M(r) = \iiint_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r'=0}^{r'=r} \mu(r') r' d\theta r' \sin \theta d\varphi dr'$

$$\rightarrow M(r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^r \mu(r') r'^2 dr' = \int_0^r \mu(r') 4\pi r'^2 dr'$$



**22)** Pour  $r > R_J$ ,  $G(r) = \frac{GM_J}{r^2}$  avec  $M_J = \int_0^{R_J} \mu(r') 4\pi r'^2 dr'$

$$\Phi(r) = -\frac{GM_J}{r}$$

**23)** Malheureusement, la base sphérique n'est pas définie. Il faut comprendre ici que ce nouvel angle  $\theta$  n'a rien à voir avec celui des coordonnées polaires de la partie I.2. C'est ici, la colatitute sur Jupiter, c'est-à-dire l'angle entre l'axe des pôles  $\vec{u}_z$  et  $\vec{u}_r$  :  $\vec{a}(P) = -r \sin \theta \omega_{sid}^2 (\sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta)$

**24)** L'équilibre de la masse élémentaire  $\mu d\tau$  dans le référentiel non galiléen lié à Jupiter est dû en partie à la force gravitationnelle  $\mu d\tau \vec{G}(P)$  et à la **force d'inertie d'entraînement**  $-\mu d\tau \vec{a}(P)$ . Cette dernière étant axifuge et de norme **maximale à l'équateur** ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ), la planète se déforme en devenant ellipsoïdale.

**25-26)** Dans le cas d'une boule homogène,  $K = \frac{2}{5}$ . La comparaison de la valeur réelle de  $K$  avec  $\frac{2}{5}$  permet de mieux connaître la structure de Jupiter, notamment de prévoir la présence d'un noyau solide si  $K < \frac{2}{5}$ .

**27)**  $f'(v_c) = 0 \Leftrightarrow v_c = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$

$$28) \quad v_c(He, 170 K) \sim v_c(H_2, 170 K) \sim 10^3 \text{ m.s}^{-1} < v_{l,J} = \sqrt{\frac{2GM_J}{R_J}} \sim 6.10^4 \text{ m.s}^{-1}$$

$$v_c(He, 300 K) \sim v_c(H_2, 300 K) \sim 10^3 \text{ m.s}^{-1} < v_{l,T} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \sim 1,1.10^4 \text{ m.s}^{-1}$$

Sur Terre, l'écart entre la vitesse de libération et la vitesse la plus probable est **moindre**, ce qui laisse supposer que les molécules **les plus rapides ont la capacité de se libérer** de l'attraction terrestre.

Sur Jupiter, cette libération est plus difficile.

**29-30)** On applique le 1<sup>er</sup> principe à la tranche comprise entre  $x$  et  $x + dx$ . En régime stationnaire,

$$j_{th}(x) = j_{th}(x + dx) \rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \rightarrow T(x) = \frac{T_2 - T_1}{e}x + T_1 \rightarrow \mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\lambda S(T_1 - T_2)}{e}$$

**31)** La température est l'analogie du potentiel et la puissance est l'analogie de l'intensité :  $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$

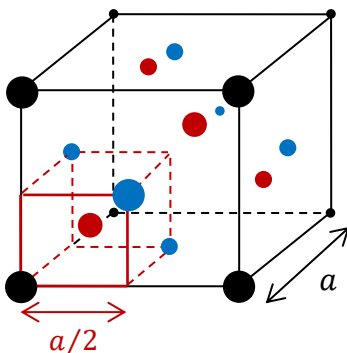
**32)** Les résistances thermiques sont associées en série,  $R_e = \frac{N}{S} \left( \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} \right) + \frac{e_1}{\lambda_1 S} \sim \frac{N}{S} \left( \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} \right)$

$$R_e = \frac{N(e_1 + e_2)}{S} \left( \frac{e_1}{(e_1 + e_2)\lambda_1} + \frac{e_2}{(e_1 + e_2)\lambda_2} \right) = \frac{e}{\lambda S} \quad \text{Avec } \lambda = \frac{(e_1 + e_2)\lambda_1\lambda_2}{e_1\lambda_2 + e_2\lambda_1} \quad (*)$$

**33)** 1<sup>er</sup> cas : Le milieu est homogène et sa conductivité équivalente est  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ , ce que confirme (\*).

2<sup>ème</sup> cas : Le milieu est principalement composé de métal et  $\lambda = \lambda_2$ , ce que confirme (\*).

**34-36)** Si on divise la maille en **huit petits cubes** de côté  $\frac{a}{2}$ , **un atome** de germanium est au centre de quatre de ces petits cubes, deux dans la moitié basse suivant une petite diagonale et deux dans la moitié haute suivant l'autre petite diagonale. La coordinence d'un atome de germanium est égale à **quatre**.



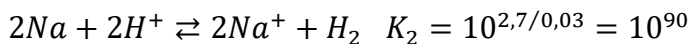
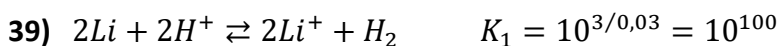
La maille contient 8 atomes de germanium  $\left( 8 * \frac{1}{8} + 6 * \frac{1}{2} + 4 \right)$ .

$$r_{Ge} = \frac{a\sqrt{3}}{8} \rightarrow C = \frac{8 * \frac{4}{3} \pi r_{Ge}^3}{a^3} = \frac{\sqrt{3} \pi}{16} = 34 \%$$

$$\mu_{Ge} = \frac{8M_{Ge}}{N_A a^3} = 5,32.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

**37)** Malgré sa masse volumique plus importante, le sodium est une alternative sérieuse au lithium du fait de son abondance sur Terre (malheureusement sous la forme  $Na^+$  ...) et de la rapidité du temps de charge d'une batterie sodium-ion.

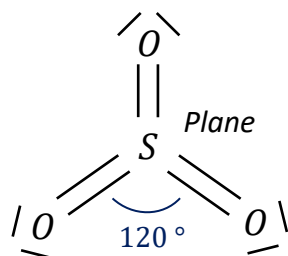
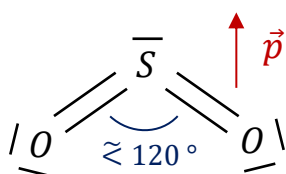
**38)  $1s^2 2s^1$**  Le lithium est un excellent réducteur car **il cède facilement son électron périphérique** afin d'atteindre la structure de l'hélium. Il est très peu électronégatif car sa structure électronique est trop éloignée de celle du néon.



Du point de vue de la thermochimie, le lithium est **plus réactif** car meilleur réducteur.

**40)** Les courbes intensité-potentiel montrent clairement qu'en valeur absolue, **la surtension cathodique** du couple de l'eau sur **le lithium est plus grande** que celle sur le sodium. La cinétique de la réaction avec le lithium est plus lente (voire bloquée à  $pH = 7$ ), la prévision thermodynamique est remise en cause par l'aspect cinétique, la réaction avec le sodium est préférable, elle est plus rapide et tout autant quantitative.

**41)** La molécule  $SO_2$  est coudée et polaire. La molécule  $SO_3$  est plane, trigonale et apolaire.



**42)**  $\Delta_r H^0 = -197,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \quad \Delta_r S^0 = -187,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Dans le cadre de l'approximation d'Ellingham, les enthalpies standards de formation et les entropies molaires standards sont **indépendantes de la température** :  $\Delta_r G^0 = -197,8 + 0,1878 T \text{ (kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$

**43)** D'après la loi de Van 't Hoff  $\left( \frac{d \ln(K^0)}{dT} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2} \right)$ , la réaction étant exothermique, l'augmentation de la température **ne favorise pas** la production de  $SO_3$ . En effet,  $K^0(T)$  est une fonction décroissante.

**44-45)**  $K^0(T) = \frac{x_{SO_3}^2 P^0}{x_{O_2} x_{SO_2}^2 P}$  D'après la loi de Le Chatelier, la réaction consommant du gaz, l'augmentation de la pression **favorise la production de  $SO_3$** . En effet, à  $T$  constante,  $x_{SO_3}$  augmente si  $P$  augmente. On peut aussi distinguer  $P$  de  $P_{\text{éq}}(T)$  et remarquer que  $Q_r < K^0(T)$  si  $P > P_{\text{éq}}(T)$ .

**46)** Il faut travailler à **haute pression** pour améliorer le rendement et la cinétique mais pas excessivement car cela aura un coût. Il faut préconiser une **température moyenne de compromis** et surtout l'emploi de **catalyseur**.