DM 7 : solution Mines PC 2019

Remarque : qu'est-ce qu'un opérateur de transfert ? Suivant Wikipédia : si on se fixe une fonction $h : X \to X$ (pour nous $X = [0,1]$) dont on veut étudier la dynamique (i.e. les suites $u_{n+1} = h(u_n)$ pour toutes les valeurs possibles de u_0), on peut étudier l'opérateur $T : \mathcal{C}(X,\mathbb{C}) \to \mathcal{C}(X,C)$, défini pour tout $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$, par $Tf(x) = \sum_{y\in h^{-1}(\{x\})} g(y)f(y)$ où g est une « fonction de pondération ». Beaucoup de propriétés dynamiques de h peuvent se lire sur T et ses valeurs propres.

Dans l'exemple étudié ici $h : x \mapsto 2x - \lfloor(2x)\rfloor$ est le décalage de Bernoulli : pour chaque $x \in [0,1]$ il a deux antécédents par h qui sont $x/2$ et $(x+1)/2$. La fonction de pondération est constante égale à 1/2.

Wikipédia mentionne aussi que dans ce cas particulier du décalage de Bernoulli, on peut faire une étude exacte de cet opérateur.

1) Soit $f \in \mathcal{C}^0$.
(i) Par théorèmes généraux, la continuité de f entraîne celle de $T(f)$.
(ii) De plus

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x+1) = \frac{1}{2}\left(f(\frac{x+1}{2}) + f(\frac{x+2}{2})\right) \overset{f\ 1-period.}{=} \frac{1}{2}\left(f(\frac{x+1}{2}) + f(\frac{x}{2})\right) = T(f)(x)$$

et $T(f)$ est donc 1-périodique ce qui donne finalement $T(f) \in \mathcal{C}^0$.

2) Soit $f \in \mathcal{C}^0$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |T(f)(x)| \leq \frac{1}{2}\left(|f(x/2)| + |f((x+1)/2)|\right) \leq \frac{1}{2}(\|f\|_\infty + \|f\|_\infty) = \|f\|_\infty$$

c'est à dire

$$\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

On en déduit la continuité de l'application linéaire T, et l'inégalité :

$$|||T||| = \sup_{\|f\|_\infty=1} \|T(f)\|_\infty \leq 1.$$

De plus, pour $f = e_0$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty = 1$ ce qui montre que

$$|||T||| = \max_{\|f\|_\infty=1} \|T(f)\|_\infty = 1$$

3) Pour λ vp et f vecteur propre associé, on a $|\lambda|\|f\|_\infty = \|T(f)\|_\infty$
Et par la question précédente, $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ d'où $|\lambda|\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et le résultat en simplifiant par $\|f\|_\infty$ qui est non nul.

4) • Soit $f \in H^\circ$; le changement de variable $u = x/2$ donne

$$\int_0^1 f(x/2)\,dx = 2\int_0^{1/2} f(u)\,du$$

De même, en posant $u = (x+1)/2$ on a

$$\int_0^1 f((x+1)/2)\,dx = 2\int_{1/2}^1 f(u)\,du$$

En combinant ces égalités, on a alors

$$\int_0^1 T(f)(x)\,dx = \int_0^1 f(u)\,du = 0$$

et donc $T(f) \in H^\circ$. H° est ainsi stable par T.
• Analyse : soit $f \in \mathcal{C}^0$. Si $f = \lambda e_0 + h$ avec $h \in H^0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

Alors en intégrant : $\int_0^1 f = \lambda + 0$ ce qui détermine $\lambda = \int_0^1$ et donne comme unique couple candidat $\lambda = \int_0^1 f$ et $h = f - (\int_0^1 f)e_0$.

• Synthèse : Soit $f \in \mathcal{C}^0$ quelconque. Et $h = f - (\int_0^1 f)e_0$ Alors $\int_0^1 h = \int_0^1 f - \int_0^1 f = 0$ donc $h \in H^0$

Donc la décomposition $f = f - (\int_0^1 f)e_0 + (\int_0^1 f)e_0$ convient et elle est unique par la partie analyse, ce qui démontre bien que :

$$\mathcal{C}^0 = \mathrm{Vect}(e_0) \oplus H^0$$

N.B. Il n'y a pas de résultat de cours sur les hyperplans en dim. infinie au programme.

5) La décomposition précédente pour tout $f \in E$, montre que pour tout $f \in \mathcal{C}^0$, $P(f) = \left(\int_0^1 f\right) e_0$.

6) a) L'essentiel : si $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\int_0^1 e^{2i\pi pt} dt = \frac{1}{2i\pi p}[e^{2i\pi pt}]_0^1 = 0 \quad (1)$$

Par Euler, $f(t) = \sin(2\pi t) = (e^{2i\pi t} - e^{-2i\pi t})/2i$.

Donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(f) = \frac{1}{2i}(\int_0^1 e^{2i(-k+1)\pi t} - \int_0^1 e^{2i(-k-1)t} dt)$.

Donc avec (1) si $k \notin \{-1, 1\}$, on a $c_k(f) = 0$ et $c_1(f) = \frac{1}{2i}$ et $c_{-1}(f) = -\frac{1}{2i}$

b) La linéarité est celle de l'intégrale, la continuité vient de l'inégalité triangulaire sur les intégrales :

$$|c_k(f)| \leq \int_0^1 |f(t)|.|\exp(-2i\pi kt)| dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty .1 = \|f\|_\infty$$

qui donne donc

$$|||c_k||| \leq 1$$

On a enfin $|||c_k||| \geq |c_k(e_k)| = 1$ d'où le résultat :

$$|||c_k||| = 1$$

N.B. les éléments de E_∞ sont toujours des combinaisons linéaires *finies* des e_k !
Car dire que $f \in E_\infty$ signifie qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f \in E_n$ et donc $f = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e_k$.
Les éléments de E_∞ s'appelle les *fonctions polynomiales-trigonométriques*

7) On a $T(e_k)(x) = \frac{1}{2}\left(e^{2ik\pi \frac{x}{2}} + e^{2ik\pi \frac{x+1}{2}}\right) = \frac{e^{ik\pi x}}{2}(1 + e^{ik\pi})$ et ainsi $T(e_{2k+1}) = 0$ et $T(e_{2k}) = e_k$

Chaque élément d'une famile génératrice de E_n est donc envoyé dans E_n par T et ceci indique que E_n est stable par l'application linéaire T.

Par ailleurs, $\int_0^1 e_k$ est nul si $k \neq 0$ et vaut 1 si $k = 0$ ainsi

$$\forall k \neq 0,\ P(e_k) = 0 \ \text{ et } \ P(e_0) = e_0$$

Comme $Im(P) = Vect(e_0) \subset E_n$ pour tout n, la stabilité pour P est immédiate.

8) La matrice de T_2 dans la base $(e_0, e_1, e_{-1}, e_2, e_{-2})$ est $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Donc $\chi_{T_2} = X^4(X-1)$. Ainsi la v.p. 0 est de multiplicité algébrique 4.

Comme la matrice est clairement de rang 3, le ss-ev propre associé à la vp 0 n'est pas 4, d'où la non diagonalisabilité de T_2 car la multiplicité géométrique de la v.p. est différente de la multiplicité algébrique.

9) Procédons par récurrence sur l'entier n.

- Pour $n = 1$, $k = 1$. On a $T_1 = P_1$ (ces deux applications linéaires agissent de la même façon sur la base (e_0, e_1, e_{-1}). Ainsi, pour $p \geq 1$, $T_1^p = P_1^p = P_1$ (grâce à $P_1^2 = P_1$).
- Soit $n \geq 1$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang n. Soit k l'unique entier tel que $2^{k-1} \leq n < 2^k$. Alors $k' = k-1$ vérifie alors $2^{k'-1} \leq \lfloor n/2 \rfloor < 2^{k'}$ et par hypothèse de récurrence, $\forall q \geq k-1,\ T_n^q = P_n$ Soit $p \geq k$; on a

$$\forall f \in E_{n+1},\ T_{n+1}^p(f) = T_{n+1}^{p-1}(T(f))$$

Or, pour $f \in E_{n+1}$, $T(f) \in E_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \subset E_n$ et l'identité précédente s'écrit donc

$$\forall f \in E_{n+1},\ T_{n+1}^p(f) = T_n^{p-1}(T(f))$$

Avec l'hypothèse au rang n, on a donc

$$\forall f \in E_{n+1},\ T_{n+1}^p(f) = P_n(T(f))$$

Enfin, comme $\int_0^1 f = \int_0^1 T(f)$ (calcul vu en question 4) et avec la formule de P (question 5) on a $P(T(f)) = P(f)$ et ainsi $P_n(T(f)) = P(f) = P_{n+1}(f)$ (pour $f \in E_{n+1}$). On a ainsi $\forall f \in E_{n+1},\ T_{n+1}^p(f) = P_{n+1}(f)$ ce qui prouve le résultat au rang $n+1$.

10) Soit $f \in \mathcal{C}^0$. Par définition

$$c_k(T(f)) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 e^{-2i\pi kx} f(\frac{x}{2})\,dx + \int_0^1 e^{-2i\pi kx} f(\frac{x+1}{2})\,dx\right)$$

On pose $u = x/2$ dans la première intégrale et $u = (x+1)/2$ dans la seconde pour obtenir :

$$c_k(T(f)) = c_{2k}(f)$$

11) a) Soit $g \in E_\infty$. On a un $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $g = \sum_{k=-N}^{N} \lambda_k e_k$ et $\overline{g} = \sum_{k=-N}^{N} \overline{c_k}\,\overline{e_k}$.

Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 f\overline{g} = \sum_{k=-N}^{N} \overline{\lambda_k} c_k(f) = 0$$

b) Soit (g_n) comme dans l'énoncé. Alors $\|f\overline{g_n} - f\overline{f}\|_\infty \leq \|f\|_\infty.\|g_n - f\|_\infty$ donc par majoration : $(f\overline{g_n})$ converge uniformément vers $|f|^2$ sur $[0,1]$.

Par intégration d'une limite uniforme sur un segment, on conclut que

$$\int_0^1 f\overline{g_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 |f|^2.$$

Avec le a) on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f\overline{g_n} = 0$ donc $\int_0^1 |f(t)|^2 dt = 0$ comme voulu.

La fonction continue et positive $|f|^2$ a une intégrale nulle, elle est donc nulle.

12) Par la question précédente, on a montré l'implication non triviale de l'équivalence :

$$\boxed{\text{une fonction } f \in \mathcal{C}^0 \text{ est nulle, si et seulement si, tous ses coefficients de Fourier } c_k(f) \text{ sont nuls.}}$$

Donc ici en appliquant ce résultat à Tf à la place de f, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} f \in \ker(T) \Leftrightarrow Tf = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},\ c_k(T(f)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},\ c_{2k}(f) = 0 \end{aligned}$$

la dernière équivalence étant donnée par le calcul de la Q 10.

$\boxed{\ker(T) \text{ est donc constitué des éléments de } E \text{ dont les coefficients de Fourier d'indices pairs sont nuls.}}$

13) C'est l'inégalité des accroissements finis, appliquée à $f(x) = e^{ix}$ dont la dérivée a un module $= 1$ (et donc ≥ 1).
N.B. L'inégalité (PAS l'égalité) des accroissements finis est bien valable pour les fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{C}$.

14) • Montrons que l'ensemble $\mathcal{C}^\alpha$ des fonctions α-hölderiennes est un s.e.v de $\mathcal{C}^0$.
— La fonction nulle est bien sûr hölderienne et 1-périodique donc dans $\mathcal{C}^\alpha$,
— si f, g sont dans $\mathcal{C}^\alpha$ on a par IT, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{|\lambda f(x) + \mu g(x) - \lambda f(y) - \mu g(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{|\lambda||f(x) - f(y)| + |\mu||g(x) - g(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq |\lambda| m_\alpha(f) + |\mu|.m_\alpha(g).$$

ce qui montre bien que $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^\alpha$ et pour la suite que :

$$m_\alpha(\lambda f + \mu g) \leq |\lambda| m_\alpha(f) + |\mu| m_\alpha(g) \quad (*)$$

• Montrons que $|| \ ||_\alpha$ est une norme. :
— La positivité est évidente, l'axiome de séparation est direct car si $||f||_\infty \leq ||f||_\alpha = 0$ entraine $||f||_\infty = 0$ et donc $f = 0$ puisque $|| \ ||_\infty$ est une norme.
— L'inégalité triangulaire vient de la majoration $(*)$ précédente en prenant $\lambda = \mu = 1$.
— L'homogénéité peut se voir en écrivant que la borne supérieure des $\frac{|\lambda||f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$, quand x et y varient, est égale à $|\lambda|$ fois la borne supérieure des $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$ ce qui donne

$$m_\alpha(\lambda f) = |\lambda| m_\alpha(f)$$

Comme $|| \ ||_\infty$ est aussi homogène, on a la conclusion par somme

15) Soit $f \in \mathcal{C}^\alpha$. On a (inégalité triangulaire)

$$|T(f)(x) - T(f)(y)| \leq \frac{1}{2}\left(|f(\frac{x}{2}) - f(\frac{y}{2})| + |f(\frac{x+1}{2}) - f(\frac{y+1}{2})|\right)$$

Par définition de $m_\alpha(f)$, on en déduit que

$$|T(f)(x) - T(f)(y)| \leq \frac{1}{2} m_\alpha(f)\left(|\frac{x}{2} - \frac{y}{2}|^\alpha + |\frac{x+1}{2} - \frac{y+1}{2}|^\alpha\right) = \frac{m_\alpha(f)}{2^\alpha}|x-y|^\alpha$$

$T(f)$ (qui est dans $\mathcal{C}^0$) est donc dans $\mathcal{C}^\alpha$ avec $m_\alpha(T(f)) \leq \frac{m_\alpha(f)}{2^\alpha}$ et $\mathcal{C}^\alpha$ est stable par T.

16) D'après la question précédente, $\|T_\alpha(f)\|_\alpha \leq \frac{m_\alpha(f)}{2^\alpha} + \|T(f)\|_\infty$ Avec la question 2 et comme $2^\alpha \geq 1$, on a donc

$$\forall f \in \mathcal{C}^\alpha,\ \|T_\alpha(f)\|_\alpha \leq m_\alpha(f) + \|f\|_\infty = \|f\|_\alpha$$

On note que $e_0 \in \mathcal{C}^\alpha$ avec $m_\alpha(e_0) = 0$ et donc $\|e_0\|_\alpha = 1$. Comme $T(e_0) = e_0$, l'inégalité qui précède est une égalité pour e_0. On a donc $\sup_{\|f\|_\alpha = 1} \|T_\alpha(f)\|_\alpha = 1$

17) On a $|\lambda^k e_{2^k}(x)| \leq |\lambda|^k$ Le majorant est indépendant de x et est, si $|\lambda| < 1$, le terme général d'une série convergente. Dans ce cas, $\sum(\lambda^k e_{2^k})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. La fonction somme f_λ est continue comme somme d'une série normalement convergente de fonctions continues (et 1-périodique car limite simple d'une suite de fonctions 1-périodiques. On a ainsi $f_\lambda \in \mathcal{C}^0$
La question 7 permet de voir que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T(S_n) = \lambda S_{n-1}$$

et la 2 montre que T est une application linéaire continue au sens de $\|.\|_\infty$. La suite $(T(S_n))$ est donc convergente au sens de $\|.\|_\infty$ vers $T(f_\lambda)$. Par unicité des limites, on a alors $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ et en évaluant en 0 ($f_\lambda(0) = 1/(1-\lambda)$) on constate que f_λ n'est pas la fonction nulle.

18) • On prend d'abord x, y tels que $|x-y| \leq 1$.
Comme $|e_p(x) - e_p(y)| \leq 2$, on a par CvA et IT

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k (e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y))\right| \leq 2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\lambda|^k = \frac{2}{1-|\lambda|}|\lambda|^{n+1}$$

Comme $|\lambda|^{n+1} \leq 2^{-\alpha(n+1)}$ et que $2^{-(n+1)} \leq |x-y|$ on a $|\lambda|^{n+1} \leq |x-y|^\alpha$ et

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda^k (e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y))\right| \leq \frac{2}{1-|\lambda|}|x-y|^\alpha$$

Par ailleurs, comme $|e^{ix} - e^{iy}| \leq |x-y|$ on a aussi
$|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y))| \leq \sum_{k=0}^{n} |\lambda|^k 2^{k+1}\pi|x-y| \leq 2\pi|x-y| \sum_{k=0}^{n}(2^{1-\alpha})^k$ Comme $|x-y| \leq |x-y|^\alpha$ (car $|x-y| \leq 1$ et $\alpha \in [0,1]$) et on a donc
$|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y))| \leq \frac{2\pi}{1-2^{1-\alpha}}|x-y|^\alpha$.
• Dans le cas $|x-y| > 1$, on majore brutalement par IT et il vient
$|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \leq 2\|f_\lambda\|_\infty \leq 2\|f_\lambda\|_\infty |x-y|^\alpha$
Tout ceci démontre bien l'existence d'une constante C indépendante de x, y telle $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$ ($C = \max(\frac{2}{1-|\lambda|}, \frac{2\pi}{1-2^{1-\alpha}}, 2\|f_\lambda\|_\infty)$ convient).

19) On a déjà vu que $\mathcal{C}^\alpha$ et H° sont stables par T resp. aux Q 15 et Q4.

20) On montre par récurrence sur n la propriété $T^n(f)(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(k2^{-n} + x2^{-n})$ pour tous $f \in \mathcal{C}^0$ et $x \in \mathbb{R}$
Pour $n = 0$, évident.
Soit $n \geq 0$ tel que le résultat soit vrai au rang n. Soit $f \in \mathcal{C}^0$ et $x \in \mathbb{R}$. On a $T^{n+1}(f)(x) = T^n(T(f))(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} T(f)(k2^{-n} + x2^{-n})$
$= 2^{-n-1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \big(f(k2^{-n-1} + x2^{-n-1})$
$+ f(k2^{-n-1} + x2^{-n-1} + \frac{1}{2})\big)$
Le changement d'indice $j = k + 2^n$ donne
$\sum_{k=0}^{2^n-1} f(k2^{-n-1} + x2^{-n-1} + \frac{1}{2}) = \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} f(j2^{-n-1} + x2^{-n-1})$ et on peut alors regrouper les sommes pour obtenir
$T^{n+1}(f)(x) = 2^{-(n+1)} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} f(k2^{-(n+1)} + x2^{-(n+1)})$ ce que nous voulions.

21) Notons $x_k = x2^{-n} + k2^{-n}$.
La question précédente invite à considérer $2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(x_k) - \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt$.
Pour $f \in \mathcal{C}^0$ relation de Chasles puis par 1-périodicité, on a

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt = \int_{\frac{x}{2^n}}^{\frac{x}{2^n}+1} f(t)\, dt = \int_0^1 f(t)\, dt$$

il vient donc $|T^n(f)(x) - \int_0^1 f(t)\, dt| \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \left|\frac{f(x_k)}{2^n} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt\right|$ Comme $x_{k+1} - x_k = 1/2^n$, ceci peut aussi s'écrire

$$|T^n(f)(x) - \int_0^1 f(t)\, dt| \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(t))\, dt\right|$$

Si $f \in \mathcal{C}^\alpha$, la positivité de l'intégrale donne

$$|T^n(f)(x) - \int_0^1 f(t)\, dt| \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x_k) - f(t)|\, dt \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} m_\alpha(f)|x_k - t|^\alpha\, dt$$

Pour $t \in [x_k, x_{k+1}]$, $|x_k - t| \leq 2^{-n}$ et ainsi

$$|T^n(f)(x) - \int_0^1 f(t)\, dt| \leq m_\alpha(f) 2^{-n\alpha} \int_{\frac{x}{2^n}}^{\frac{x}{2^n}+1} dt = m_\alpha(f) 2^{-n\alpha}$$

Cette inégalité ayant lieu pour tout x, on a finalement (on peut écrire T ou T_α puisque l'on est dans $\mathcal{C}^\alpha$)

$$\sup_{x\in[0,1]} |T_\alpha^n(f)(x) - \int_0^1 f(t)\, dt| \leq m_\alpha(f) 2^{-n\alpha}$$

22) La question précédente donne

$$\|T_\alpha^n(f)\|_\infty \leq m_\alpha(f) 2^{-n\alpha}$$

Par ailleurs, l'application répétée de la majoration de $m_\alpha(T(f))$ vue en question 15 donne

$$m_\alpha(T_\alpha^n(f)) \leq \frac{m_\alpha(f)}{2^{n\alpha}}$$

On en déduit que

$$\|T_\alpha^n(f)\|_\alpha \leq m_\alpha(f)2^{-n\alpha} + m_\alpha(f)2^{-n\alpha} \leq 2^{1-n\alpha} m_\alpha(f) \leq 2^{1-n\alpha}\|f\|_\alpha$$

23) On a vu en question 17 et 18 que si $|\lambda| \leq 2^{-\alpha}$ alors λ est valeur propre de T_α (de vecteur propre associé $f_\lambda \in \mathcal{C}^\alpha$). Par ailleurs, 1 est aussi valeur propre (vecteur propre e_0 qui est bien dans $\mathcal{C}^\alpha$).
Réciproquement, soit λ une valeur propre de T_α différente de 1. Il existe $f \in \mathcal{C}^\alpha$ non nulle telle que $T_\alpha(f) = \lambda f$. f peut se décomposer sur D et H° en $f = te_0 + g$. $T(f) = \lambda f$ donne alors $te_0 + T(g) = \lambda.te_0 + \lambda g$. Par unicité de la décomposition (on sait que $T(g) \in H^\circ$), on a donc $\lambda te_0 = te_0$ et $T(g) = \lambda g$. Comme $\lambda \neq 1$, on a $t = 0$ et $f = g \in H^\alpha$. D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\lambda^n|\|f\|_\alpha = \|T_\alpha^n(f)\|_\alpha \leq 2^{1-n\alpha}\|f\|_\alpha$$

et donc (comme $\|f\|_\alpha > 0$ et par croissance de l'élévation à la puissance $1/n$)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\lambda| \leq 2^{1/n} 2^{-\alpha}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $|\lambda| \leq 2^{-\alpha}$. Les seules valeurs propres possibles sont bien celles annoncées.