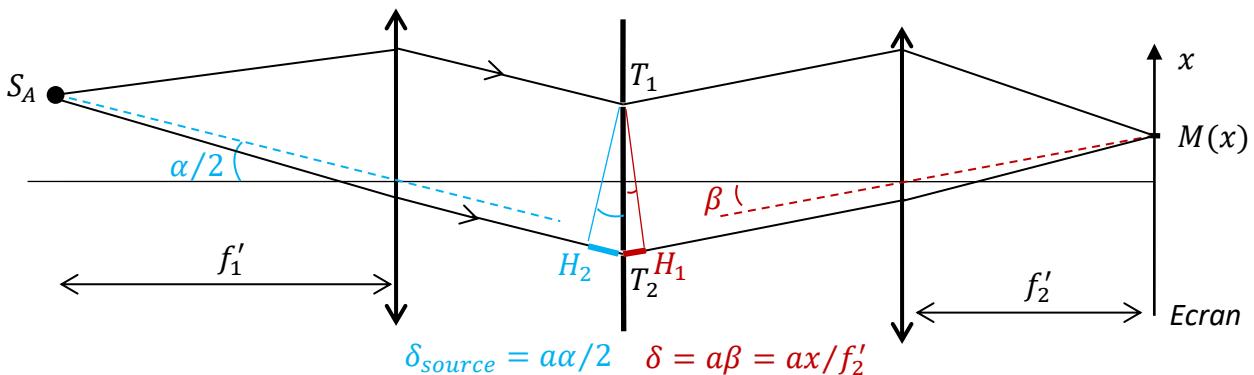


1) En fait, T_1 et T_2 sont les deux centres des fentes ... $\delta_{source} = H_2 T_2 = \frac{a\alpha}{2}$



2) $s_1(t, M) = s_0 \cos(\omega t - k(S_A T_1 M))$ et $s_2(t, M) = s_0 \cos(\omega t - k(S_A T_2 M))$

$$3) I(M) = K \langle (s_1(t, M) + s_2(t, M))^2 \rangle = 4Ks_0^2 \langle \cos^2(\omega t - k((S_A T_2 M) + (S_A T_2 M))/2) \rangle \cos^2(k\delta_{tot}/2)$$

$$\rightarrow I(\delta) = 2Ks_0^2 \cos^2(k\delta_{tot}/2) = Ks_0^2(1 + \cos(k\delta_{tot})) = 2I_0(1 + \cos(k(\delta + a\alpha/2)))$$

Avec $I_0 = \frac{Ks_0^2}{2}$, l'intensité de chacun des signaux s_1 et s_2 .

4-5) Le signaux issus de S_A n'interfèrent pas avec ceux issus de S_B car il y a **incohérence mutuelle**.

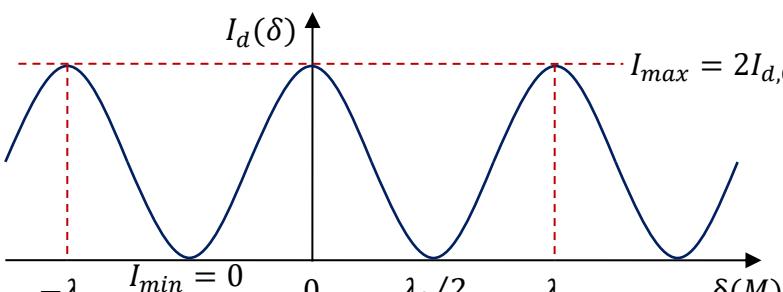
Les sources émettent des paquets d'ondes décorrélés, leur phase à l'origine sont des fonctions aléatoires dans le temps et différentes d'une source à l'autre. Si on note $s_{B1}(t, M)$ et $s_{B2}(t, M)$ les signaux issus de S_B ,

$$\begin{aligned} I_d(M) &= K \langle (s_1(t, M) + s_2(t, M) + s_{B1}(t, M) + s_{B2}(t, M))^2 \rangle \\ &= K \langle (s_1(t, M) + s_2(t, M))^2 \rangle + K \langle (s_{B1}(t, M) + s_{B2}(t, M))^2 \rangle = I(M) + I_B(M) \end{aligned}$$

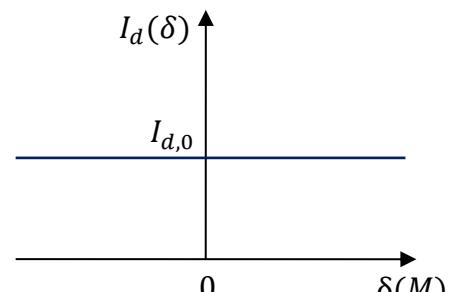
Car $\langle s_1(t, M)s_{B1}(t, M) \rangle = \langle s_2(t, M)s_{B1}(t, M) \rangle = \langle s_1(t, M)s_{B2}(t, M) \rangle = \langle s_2(t, M)s_{B2}(t, M) \rangle = 0$

Par analogie, $I_B(\delta) = 2I_0(1 + \cos(k(\delta - a\alpha/2)))$ car $(S_B T_2) - (S_B T_1) = -a\alpha/2$

Ainsi, $I_d(\delta) = 2I_0(2 + \cos(k(\delta + a\alpha/2)) + \cos(k(\delta - a\alpha/2))) = 4I_0(1 + \cos(kaa\alpha/2) \cos(k\delta))$



$\Gamma(a, \alpha) = 1$ Contraste maximal – Franges nettes



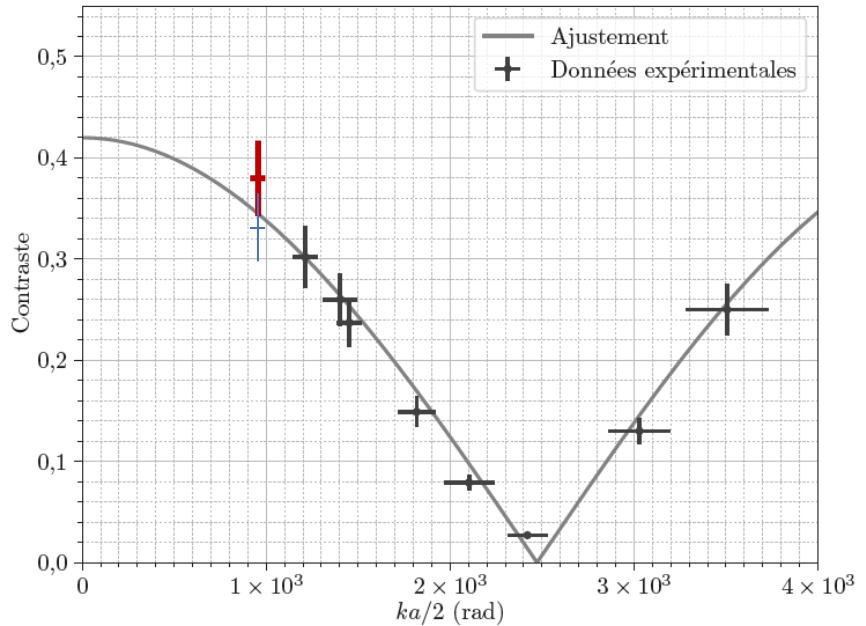
$\Gamma(a, \alpha) = 0$ Plus de franges

$$6-7) \frac{ka}{2} = \frac{\pi a}{\lambda_0} = 966 \quad \frac{u(ka/2)}{ka/2} = \frac{u(\lambda_0)}{\lambda_0} \rightarrow u(ka/2) = 45 \quad u(a) \text{ a été négligée.}$$

8-9) Si on respecte le programme en suivant scrupuleusement la consigne de l'énoncé, c'est-à-dire en ne prenant en compte que le maximum principal et les deux minima qui l'encadrent, sans se demander pourquoi les intensités maximales et minimales varient : $C = \frac{110 - 50}{110 + 50} = 0,38$

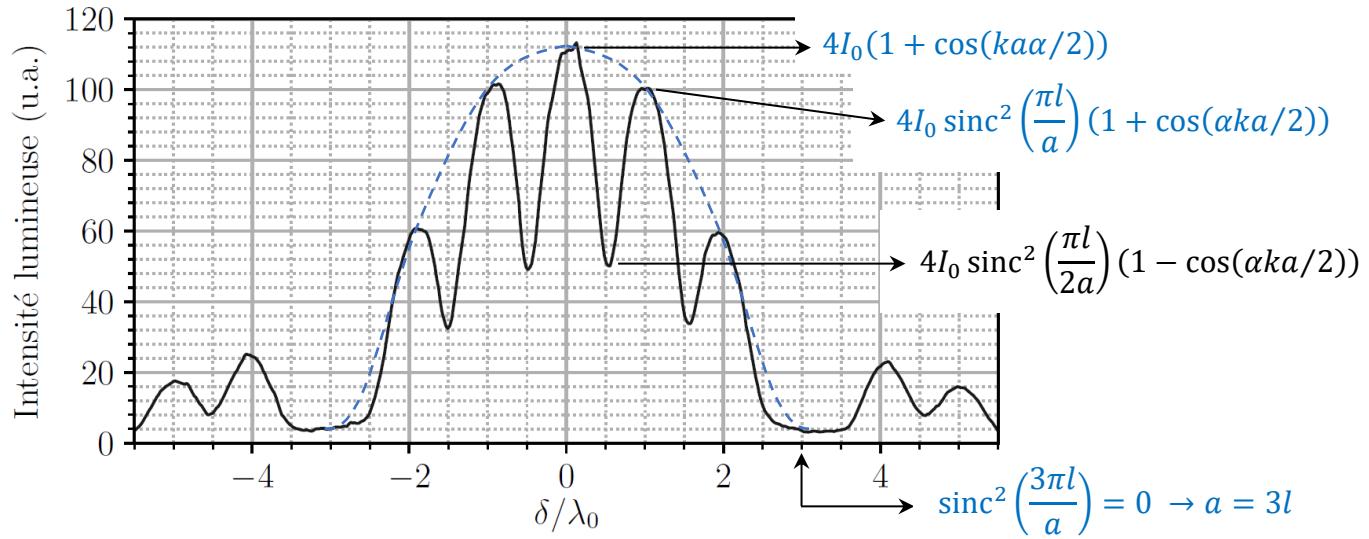
Mesure brute sans tenir compte de la diffraction (C)

Mesure corrigée en tenant compte de la diffraction (C^*)



[En fait, la figure d'interférences est modulée par le phénomène de diffraction dû aux fentes de largeur l .

$$I_d^*(\delta) = 4I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi l x}{f_2' \lambda_0}\right) \left(1 + \cos(\alpha ka/2) \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right)\right) = 4I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi l \delta}{a \lambda_0}\right) \left(1 + \cos(\alpha ka/2) \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right)\right)$$



La valeur I_{min} lue sur la figure 4 n'est pas $4I_0(1 - \cos(\alpha ka/2))$ mais $4I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi l}{2a}\right) (1 - \cos(\alpha ka/2))$.

Or d'après la largeur de la tache de diffraction, toujours sur la figure 4, $a = 3l$.

$$\text{Ainsi, } 4I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{6}\right) (1 - \cos(\alpha ka/2)) = 50 \rightarrow 4I_0(1 - \cos(\alpha ka/2)) \sim 55 \rightarrow C^* = \frac{110 - 55}{110 + 55} = 0,33]$$

10) On peut répondre de deux façons différentes à cette question très riche.

Ajustement unique : Avec les 9 valeurs **mesurées** de C (0.38, 0.30, 0.26, 0.24, 0.15, 0.08, 0.03, 0.13, 0.25) et de $\frac{ka}{2}$ (966, 1210, 1400, 1450, 1820, 2100, 2420, 3030, 3510), on ne procède qu'à **un seul** ajustement de la fonction contraste $f\left(\frac{ka}{2}\right) = C_0 \left| \cos\left(\alpha \frac{ka}{2}\right) \right|$ grâce au module **scipy.optimize.curve_fit**.

Cette fonction renvoie sous forme de tableaux, les valeurs optimales des paramètres α et C_0 ainsi que la matrice de covariance associée dont la diagonale est constituée des variances $u^2(\alpha)$ et $u^2(C_0)$.

Par défaut, les paramètres sont ajustés à partir de la valeur 1. A cause de la périodicité de f , il faut préciser ici l'intervalle dans lequel on effectue la recherche (entre 0 et 10^{-3} pour $\alpha \rightarrow \text{bounds} = (0, [1e-3, 1])$).

```
import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit
```

```
Xm=[966,1210,1400,1450,1820,2100,2420,3030,3510] #ka/2 mesurés
Cm=[0.38,0.30,0.26,0.24,0.15,0.08,0.03,0.13,0.25] #Contrastes mesurés
```

```
m=len(Cm)
```

```
def f(x,a,b): #Fonction d'ajustement
    return b*abs(np.cos(a*x))

para,cov=curve_fit(f,Xm,Cm,bounds=(0,[1e-3,1]))

alpha=para[0]
u_alpha=np.sqrt(cov[0][0])
C0=para[1]
u_C0=np.sqrt(cov[1][1])

print("alpha={:.2e} +/- {:.0e} rad".format(alpha,u_alpha))
print("C0={:.2e} +/- {:.1e}".format(C0,u_C0))

alpha=6.33e-04 +/- 8e-06 rad
C0=4.18e-01 +/- 1.2e-02
```

Ajustements multiples :

La méthode de **Monte-Carlo** consiste à simuler N ajustements en créant $2N$ listes de valeurs **simulées** (C_{sim} et $\left(\frac{ka}{2}\right)_{sim}$). Pour cela, à partir des incertitudes-types $u(C)$ et $u\left(\frac{ka}{2}\right)$, on utilise la fonction **numpy.random.uniform** qui place de façon aléatoire chaque terme i des listes simulées dans les intervalles $[C_i - \sqrt{3} u(C); C_i + \sqrt{3} u(C)]$ et $\left[\left(\frac{ka}{2}\right)_i - \sqrt{3} u\left(\frac{ka}{2}\right); \left(\frac{ka}{2}\right)_i + \sqrt{3} u\left(\frac{ka}{2}\right)\right]$ avec C_i et $\left(\frac{ka}{2}\right)_i$, les termes de rang i des listes *mesures*. Après N ajustements, on obtient deux listes de N valeurs de $C_{0,sim}$ et de α_{sim} . Les moyennes (C_0 et α) et les écarts-types expérimentaux ($u(C_0)$ et $u(\alpha)$) sont les résultats recherchés.

```

N=1000
Xsim=[] #Liste de valeurs de ka/2 simulées
Csim=[] #Liste de valeurs de C simulées
liste_alpha=[] #Liste des paramètres alpha obtenus
liste_C0=[] #Liste des paramètres C0 obtenus

for i in range(N):
    for j in range(m):
        Xsim.append(Xm[j]+30/650*Xm[j]*np.sqrt(3)*np.random.uniform(-1,1))
        Csim.append(Cm[j]+0.1*Cm[j]*np.sqrt(3)*np.random.uniform(-1,1))
    para_MC,cov_MC=curve_fit(f,Xsim,Csim,bounds=(0,[1e-3,1]))
    liste_alpha.append(para_MC[0])
    liste_C0.append(para_MC[1])

alpha_MC=np.mean(liste_alpha)
u_alpha_MC=np.std(liste_alpha,ddof=1)
C0_MC=np.mean(liste_C0)
u_C0_MC=np.std(liste_C0,ddof=1)

print("alpha MC={:.2e} +/- {:.0e} rad".format(alpha_MC,u_alpha_MC))
print("C0 MC={:.2e} +/- {:.0e} rad".format(C0_MC,u_C0_MC))

alpha MC=6.36e-04 +/- 1e-06 rad
C0 MC=4.15e-01 +/- 1e-03

```

Le gain en précision est conséquent.

11) $d = \alpha f'_1 = 509 \mu\text{m}$ $u(d) = 9 \mu\text{m}$ $u(f'_1)$ a été négligée.

12) La lecture s'opère sur un axe gradué tous les $4 \mu\text{m}$ $\rightarrow u_{lect}(x) = \frac{4}{2\sqrt{3}} \mu\text{m}$.

Les points de mesure sont espacés également de $4 \mu\text{m}$ $\rightarrow u_{point}(x) = u_{lect}(x) \rightarrow u(x) = \sqrt{2} u_{lect}(x)$

L'écart Δx entre les deux pics vaut $32 \mu\text{m}$ avec $u(\Delta x) = u(x_2 - x_1) = \sqrt{2}u(x) = 2,3 \mu\text{m}$.

Ainsi $d' = \frac{f'_1}{f'_2} \Delta x = 457 \mu\text{m}$ avec $u(d') = \frac{f'_1}{f'_2} u(\Delta x) = 33 \mu\text{m}$

Le calcul de l'écart normalisé entre les deux mesures va nous permettre de savoir s'il y a accord ou non :

$$E_N = \frac{|d - d'|}{\sqrt{u^2(d) + u^2(d')}} = 1,5 < 2 \quad \text{C'est limite mais il y a accord !}$$

13) $\delta_{tot}^{II} = \frac{\alpha a}{2} + \delta_r$ Nous retrouvons la même situation que précédemment avec maintenant une ligne à retard qui **simulate un balayage de l'écran**.

14) $\alpha_{res} = \frac{\lambda_0}{2a} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ rad}$ Ce qui correspond à une résolution spatiale de **$2,4 \cdot 10^6 \text{ km}$** !

Ce résultat décevant n'est pas surprenant : Les exoplanètes sont des objets tellement lointains que leur observation **directe** par des méthodes classiques est très difficile. Sans parler de leur très faible luminosité !

$$15-17) \quad \chi \sim \tan \chi = \frac{b}{SF_b} \rightarrow SF_b = \frac{b^2}{2r_{sch}} \quad SF_0 = \frac{R_s^2}{2r_{sch}} = 547 \text{ au}$$

Le point F_0 est extérieur au système solaire et il n'est possible d'observer A_0 qu'au-delà de ce point F_0 .

Avec une lentille mince en verre, tous les rayons en provenance de A_0 convergeraient en F' , le foyer image de la lentille (stigmatisme approché). Ce n'est pas le cas avec une lentille gravitationnelle, les rayons en provenance de A_0 coupent l'axe optique en différents points (non stigmatisme).

Cette différence provient de la dépendance en b de χ : En optique traditionnelle, χ est proportionnel à b alors qu'en optique gravitationnelle, χ est inversement proportionnel à b .

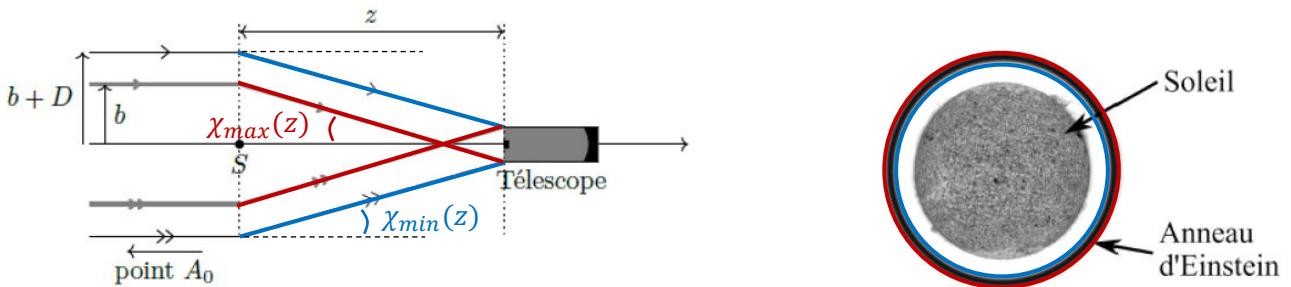
$$18-20) \quad \text{D'après le théorème de Thalès, } A_1B_1 = \frac{A_0B_0}{SA_0} SA_1$$

Si on applique le critère de Rayleigh (deux taches de diffraction sont séparées si l'écart entre leur centre est supérieur à leur demi-largeur), il faut que $A_1B_1 \geq \rho_{min} = 5 \text{ cm} \rightarrow (A_0B_0)_{min} = 526 \text{ m}$

C'est extrêmement petit devant les distances mises en jeu, la résolution est exceptionnelle.

21) Les rayons lumineux dont le paramètre d'impact varie entre b et $b + D$ ne sont pas déviés du même angle, leur inclinaison χ est comprise entre $\frac{2r_{sch}}{b+D}$ et $\frac{2r_{sch}}{b}$.

Ces deux angles limites, $\chi_{min}(z) = \frac{2r_{sch}}{b+D}$ et $\chi_{max}(z) = \frac{2r_{sch}}{b}$ définissent l'anneau d'Einstein en z .



Mais si le télescope se situe en $z' > z$, les rayons lumineux associés à l'anneau d'Einstein sont moins inclinés, l'anneau est alors défini par le nouvel intervalle $\frac{2r_{sch}}{b'+D} < \chi' < \frac{2r_{sch}}{b'}$ avec $b' > b$.

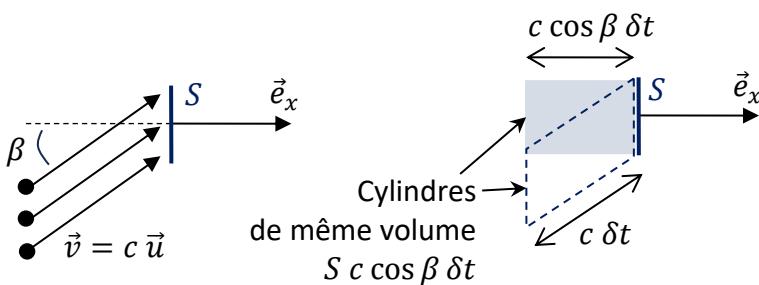
On en déduit que l'anneau se rapproche du Soleil et s'amincit ($\frac{1}{b'+D} < \frac{1}{b+D}$ et $\frac{1}{b'} - \frac{1}{b'+D} < \frac{1}{b} - \frac{1}{b+D}$).

22) Soit I , l'intensité lumineuse (puissance surfacique) en provenance de A_0 . Malgré sa dépendance en $\frac{1}{r^2}$ on suppose que celle-ci ne varie pas entre le Soleil et le télescope ($z \ll SA_0$).

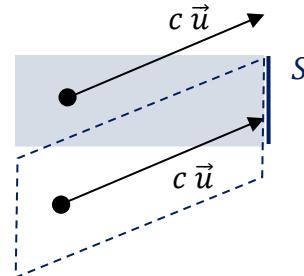
La puissance collectée sans la lentille gravitationnelle est $I \frac{\pi D^2}{4}$ alors que celle collectée avec la lentille gravitationnelle est $I\pi((b+D)^2 - b^2) = 2I\pi bD$ ($D \ll b$) : $\mu = \frac{8b}{D} = 5,6 \cdot 10^9 \gg 1$

C'est phénoménal mais il ne faut pas oublier qu'on part de presque rien !

23-24) $\mathcal{E} = \frac{hc}{\lambda}$ et $\mathbf{p} = \frac{\hbar}{\lambda}$ Les δN photons en question sont contenus dans le cylindre oblique dessiné en pointillés ci-dessous. Ce cylindre a pour volume $S c \cos \beta \delta t$. Il est intéressant de remarquer que ce cylindre a le même volume que le cylindre droit grisé. Ils permettent tous les deux un décompte correct.



En raisonnant avec le cylindre droit, la prise en compte du photon du haut compense celui du bas qui a été oublié !



Or $I_s = nc\mathcal{E}$ avec n , le nombre de photons par unité de volume. Ainsi, $\delta N = n Sc \cos \beta \delta t = \frac{I_s \lambda S \cos \beta \delta t}{hc}$.

25) L'impulsion de chacun des δN photons varie de $-\frac{2h}{\lambda} \cos \beta \vec{e}_x$. On applique la 2^{ème} loi de Newton aux δN photons : $-\frac{2h}{\lambda} \cos \beta \frac{\delta N}{\delta t} \vec{e}_x = \vec{F}_{voile \rightarrow photons} \rightarrow \vec{F}_{photons \rightarrow voile} = \frac{2I_s S \cos^2 \beta}{c} \vec{e}_x \rightarrow \mathbf{p}_r = \frac{2I_s \cos^2 \beta}{c}$

26) $p_r = \frac{2I_s}{c} = 9,1 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}$ $p_r^{exp} = \frac{F}{S} = 6,5 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} < p_r$

Environ un tiers des photons sont **absorbés** et non réfléchis.

27) On applique la 2^{ème} loi de Newton à M sur sa trajectoire circulaire (uniforme) :

$$-mR_T \omega_T^2 \vec{e}_r = -\frac{GM_s m}{R_T^2} \vec{e}_r \rightarrow R_T^3 \omega_T^2 = GM_s \quad \text{On reconnaît la 3^{ème} loi de Kepler.} \quad v_T = R_T \omega_T = \sqrt{\frac{GM_s}{R_T}}$$

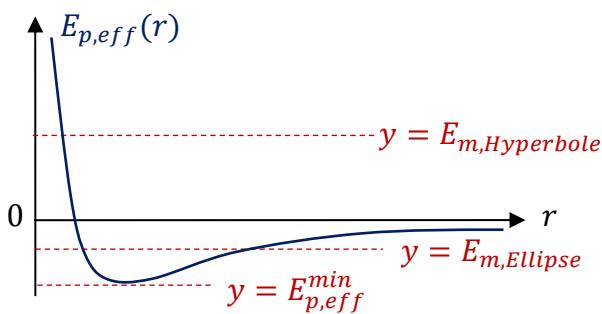
28) Tant que la force \vec{F}_r est radiale, son moment en O est nul. D'après le T.M.C. appliqué à M , $\mathbf{L}_z = \mathbf{cste}$.

De plus, $C = \frac{|L_z|}{m} = \|r\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)\| = r^2 |\dot{\theta}|$

29) $E_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} (\mathbf{p}_T R_T^2 S - GM_s \mathbf{m})$

30) $E_m = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{r} (p_T R_T^2 S - GM_s m) \rightarrow E_{p,eff}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} (\mathbf{p}_T R_T^2 S - GM_s \mathbf{m}) + \frac{mc^2}{2r^2}$

31) $\frac{dE_{p,eff}}{dr} = \frac{1}{r^2} \left(GM_s m - p_T R_T^2 S - \frac{mc^2}{r} \right)$ Cette dérivée s'annulessi $S < \frac{GM_s m}{p_T R_T^2} = S_{lim}$



Sachant que $E_m \geq E_{p,eff}(r)$, on en conclut que :

Si $E_m > 0$, la trajectoire est hyperbolique

Si $E_m = 0$, la trajectoire est parabolique

Si $E_{p,eff}^{min} < E_m < 0$, la trajectoire est elliptique

Si $E_m = E_{p,eff}^{min}$, la trajectoire est circulaire

32) A l'ouverture de la voile, $\dot{r} = 0$ et $r = R_T \rightarrow E_m = p_T R_T S - \frac{GM_s m}{R_T} + \frac{mc^2}{2R_T^2} = p_T R_T S - \frac{GM_s m}{2R_T}$

Comme on veut que $E_m > 0 \rightarrow S > S_{lim}/2 = 1,84 \cdot 10^4 \text{ m}^2 = 1,84 \text{ ha}$

33) On applique la 2^{ème} loi de Newton à M sur sa nouvelle trajectoire :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} &= -\frac{GM_s m}{r^2} \vec{e}_r + p_T S \frac{R_T^2}{r^2} \cos^2 \beta \vec{u} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{R_T \omega_T^2}{GM_s/R_T^2} \frac{d^2 \vec{\rho}}{d\tau^2}}_{\vec{\rho}} = -\frac{GM_s}{R_T^2} \frac{\vec{e}_r}{\rho^2} + \frac{p_T S}{m \rho^2} \cos^2 \beta \vec{u} \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2 \vec{\rho}}{d\tau^2} = -\frac{\vec{e}_r}{\rho^2} + \frac{p_T S}{m GM_s/R_T^2} \frac{\cos^2 \beta}{\rho^2} \vec{u} \rightarrow \eta = \frac{p_T S}{m GM_s/R_T^2} \end{aligned}$$

Le paramètre η est le rapport, au niveau de l'orbite terrestre, entre la force radiative répulsive maximale ($\beta = 0$) et la force attractive gravitationnelle, ces deux forces étant exercées par le Soleil !

34) Sur \vec{e}_r et \vec{e}_θ , nous obtenons $\frac{d^2 \rho}{d\tau^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 = -\frac{1}{\rho^2} + \frac{\eta}{\rho^2} \cos^3 \beta$ et $2 \frac{d\rho}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \rho \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = \frac{\eta}{\rho^2} \cos^2 \beta \sin \beta$

Ainsi, en posant $A(\tau) = \rho(\tau)$ $B(\tau) = \theta(\tau)$ $C(\tau) = \frac{d\rho}{d\tau}$ $D(\tau) = \frac{d\theta}{d\tau}$, on est face au système

$$\begin{cases} A' = C \\ B' = D \\ C' = AD^2 + \frac{\eta \cos^3 \beta - 1}{A^2} \\ D' = \frac{\eta}{A^3} \cos^2 \beta \sin \beta - \frac{2CD}{A} \end{cases}$$

35) $\rho(0) = 1 \quad \theta(0) = 0 \quad \frac{d\rho}{d\tau}(0) = 0 \quad \frac{d\theta}{d\tau}(0) = 1 \quad \text{cond_init} = [1, 0, 0, 1]$

36) **def voile_solaire_beta(y, tc, a, b) :**

```
return [y[2], y[3], y[0] * y[3]**2 + (a * np.cos(b)**3 - 1)/y[0]**2,
       a * np.cos(b)**2 * np.sin(b)/y[0]**3 - 2 * y[2] * y[3]/y[0]]
```

37) Lorsque $\beta = \pm 90^\circ$, la voile est **parallèle aux rayons lumineux** donc la force de pression radiative est nulle : La sonde reste sur la trajectoire circulaire imposée par la force gravitationnelle.

38) On lit sur la figure 13, $\beta_e = 20^\circ$ et $\beta_a = -52^\circ$

39) Dans un premier temps, la sonde est « freinée » par le rayonnement ($\beta_a < 0$) et **s'approche du Soleil tout en étant accélérée** (sa vitesse augmente comme un satellite terrestre « freiné » par l'atmosphère). Après le virement de bord ($\beta_e > 0$), la sonde profite de **l'augmentation de la pression de radiation** et s'éloigne du Soleil en maintenant sa vitesse à un niveau élevé. Lorsqu'elle se retrouve au niveau du cercle de rayon R_T , son déplacement quasi radial est propice à son éloignement. Le bilan est positif.

40) On applique dans le référentiel de la sonde, le 1^{er} principe de la thermodynamique en termes de puissances, à la voile de capacité thermique C . Celle-ci reçoit la puissance \mathcal{P}_{abs} et rayonne sur ses 2 faces.

$$\text{Lors de la phase de rapprochement, } C \frac{dT}{dt} = \xi I_s \frac{R_T^2}{r^2} S \cos \beta_a - 2S\varepsilon\sigma T^4$$

Cherchons à présent à quelle distance $r_{T_{max}}^{eq}$, l'équilibre thermique atteindrait-il la température T_{max} ?

$$r_{T_{max}}^{eq} = \frac{R_T}{T_{max}^2} \sqrt{\frac{\xi I_s \cos \beta_a}{2\varepsilon\sigma}} = 0,063 \text{ au}$$

Le virement de bord doit s'effectuer avant d'atteindre cette distance.

D'après la figure 14, le temps minimal envisageable est de l'ordre de **38 années**.