Banque CCINP : Semaine 8 : Ex. 1, 34, 35, 37, 44, 45
Semaine 9 : en plus le 36 , 38 39.

Ouverts, fermés

Exercice 1. Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$, déterminer si les parties suivantes sont ouvertes ou fermées et plus génralement déterminer leur intérieur et leur adhérence :
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, $[0,1[$, $[0,+\infty[$, $]0,1[\cup\{2\}$, $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$, $\bigcap_{n\geq 1}]-1/n, 1/n[$.

Exercice 2.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide *fermé, majoré*. Montrer que A admet un maximum.

Exercice 3. Montrer qu'une boule fermée est un fermé.

Exercice 4. Soit E un e.v.n. et A et B deux parties de E.
Montrer que si B est ouvert et $A \cap B = \varnothing$ alors $\overline{A} \cap B = \varnothing$.

Exercice 5 (Quasi QdC, complète l'ex. 44 de la banque CCINP)**.**
Soient A et B deux parties d'un e.v.n. E.
a) Quelle relation y-a-t-il entre $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$? (Inclusion, égalité, contre-exemples pour une inclusion ?)
b) Même question pour $Int(A \cup B)$ et $Int(A) \cup Int(B)$.
c) Quelles relations entre $Int(E \setminus A)$, $\overline{E \setminus A}$, $E \setminus \overline{A}$, $E \setminus Int(A)$?

Exercice 6. Soit E un e.v.n. et $C \subset E$ un ensemble convexe. Montrer que :

a) $\overline{C}$ est convexe.

b) $\overset{\circ}{C}$ est convexe.

c) **Définition -—** Un élément $a \in C$ est un *point extremal* de C ssi $C \setminus \{a\}$ est encore convexe.
(C'est ça les extremités : on les enlève mais cela ne change pas la convexité).
Montrer qu'un point extremal d'un convexe fermé est toujours un point de la frontière de ce fermé.

Exercice 7 (Somme de deux ouverts, de deux fermés)**.** Soit E un e.v.n. Pour deux parties A et B quelconques de E, on définit $A + B := \{a + b,\ (a, b)\ \in A \times B\}$.
a) Montrer que si A ou B sont ouverts alors $A + B$ est ouvert.
b) Montrer que si A et B sont fermés alors $A + B$ n'est pas nécessairement fermé.

Comment étudier la continuité d'une application entre e.v.n de dim. finie. :

Exercice 8. Soit $f :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
b) Montrer que f est continue au point $0 = (0,0)$.
Indication – On pourrait utiliser les coordonnées polaires $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ dans lesquelles, $r = \|(x,y)\|_2$.

Exercice 9. Etudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction f définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$.

Ouverts et fermés comme préimage d'ouverts et de fermés

Exercice 10. Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés dans $\mathbb{R}^2$, sinon préciser leur intérieur et leur adhérence :

$$\begin{array}{ll} A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\right\} & B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ 0 \leq x \leq y\right\} \\ C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \| x| < 1, |y| \leq 1\right\} & D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\right\} \\ E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}\right\} & F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\right\}. \end{array}$$

Exercice 11. soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que si $Z(f) = \{x \in [a,b],\ f(x) = 0\}$ est non vide, alors $Z(f)$ admet un plus grand et un plus petit élément.

Topologie dans $M_n(\mathbb{K})$ et applications

Exercice 12. a) Justifier que det : $A \in M_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(A) \in \mathbb{K}$ est *continue.*

b) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{K})$.

c) Montrer que l'application $GL_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto A^{-1}$ est continue.

N.B. On retrouve ici de manière plus simple le résultat de l'ex 11 pl. T1 sur l'inverse d'une limite dans le cas particulier de l'algèbre des matrices.

Exercice 13. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

Soit $\Delta = \{A \in M_n(\mathbb{K}), \det(A) = 0\}$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de Δ.

Exercice 14. a) Montrer que si A et B sont dans $M_n(\mathbb{K})$ et A est inversible, alors AB et BA sont semblables.

En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

b) En utilisant le fait que $GL_n(\mathbb{K})$ est *dense* dans $M_n(\mathbb{K})$ (cf. pl. T1) montrer que pour toutes matrices A, B dans $M_n(\mathbb{K})$, on a encore $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 15 (Adhérence)**.** Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{K})$.

Montrer que $\mathcal{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et pas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour le cas de $\mathbb{R}$, on pourra étudier déjà le cas $n = 2$.

Exercice 16. a) Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices dz.

b) Démontrer que l'application $M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}_n[X]$, $A \mapsto \chi_A$ est *continue.*

Puis que l'application $M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto \chi_A(A)$ est *continue*

c) démontrer le théorème de Cayley-Hamilton pour toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$.

Continuité des applications linéaires/multi linéaire et Norme d'opérateur

Exercice 17.

Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Soit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ et $\varphi : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$.

(i) L'application φ est-elle continue de $(E, \|\ \|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$?

(ii) L'application φ est-elle continue de $(E, \|\ \|_1)$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 18 (Positive entraîne continue)**.** Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, notée $\|\ \|$.

Soit φ une forme linéaire sur E qui est *positive* en ce sens que si $\forall f \in E$, $f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0$.

Montrer que φ est continue de $(E, \|\ \|)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 19 (Quasiment du cours...)**.** Justifier la continuité des applications suivantes avec le critère de continuité des applications linéaires ou bilinéaires. Dans le cas des A.L. déterminer leur norme d'opérateur. :

a) Si $(E, \|\ \|)$ est un e.v.n. quelconque, alors l'addition $E \times E \to E$, $(u, v) \mapsto u + v$ est continue.

b) Si $(E, (\ |\ ))$ est un espace préhilbertien, et que $a \in E$ est une vecteur fixé, alors l'application $\varphi_a : E \to \mathbb{R}$, $u \mapsto (a|u)$ est continue.

c) Si $(E, \|\ \|)$ est un e.v.n. quelconque, montrer que l'application mult de $\mathbb{R} \times E$ dans E qui à (λ, x) associe $\lambda.x$ (la multiplication externe) est continue.

Exercice 20 (Détermination explicite de normes subordonnées)**.** On considère $\mathbb{R}^n$ muni de la norme N_1 et de la norme N_∞, définies par $N_1(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ et $N_\infty(x_1, \ldots, x_n) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$ on considère A comme un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, en identifiant $\mathbb{R}^n$ à $M_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice A définit l'endomorphisme $X \mapsto AX$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Exprimer la norme $|||A|||$ en fonction des entrées $(a_{i,j})$ de A si

a) On considère la norme subordonnée au choix de la norme N_1 au départ et à l'arrivée (on la notera $|||A|||_{1,1}$)

b) On considère la norme subordonnée au choix de la norme N_∞ au départ et à l'arrivée (on la notera $|||A|||_{\infty,\infty}$)

c) On note $(x, y) \mapsto (x|y)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$N_1(x) = \max_{N_\infty(y)=1} |(x|y)|, \qquad N_\infty(x) = \max_{N_1(y)=1} |(x|y)|$$

d) Retrouver le résultat du b) à l'aide de celui du a) et du c).

Exercice 21. Soit l'espace $E := \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie. On pose $u : f \in E \mapsto \int_0^1 f - \int_{-1}^0 f$. Montrer que u est continue ; calculer $|||u|||$, et montrer que le supremum de la définition n'est pas atteint.