MP **Samedi 22 Novembre 2025**

Devoir surveillé 3 (3h)

Problème

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}, n$ est un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice identité d'ordre n est notée I_n, et $GL_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite scalaire lorsqu'elle est de la forme λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$.

La topologie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est définie à l'aide de l'une quelconque de ses normes équivalentes.

Pour une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle classe de similitude de M l'ensemble $\mathscr{S}(M)$ constitué de toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont semblables à M :

$$\mathscr{S}(M) = \left\{PMP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{K})\right\}.$$

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés topologiques des classes de similitude des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie I : le cas des matrices d'ordre 2

Q 1) Déterminer la classe de similitude d'une matrice scalaire de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

Q 2) Pour tout $k \in \mathbb{K}$, on pose $E_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{K}$, les matrices E_k et F_k sont inversibles et déterminer leurs inverses.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{K}$, les matrices $E_k A E_k^{-1}$ et $F_k A F_k^{-1}$.

c) Montrer que $\mathscr{S}(A)$ est bornée si, et seulement si, A est une matrice scalaire.

Dans la suite de cette partie, on fixe une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ et on cherche à quelle condition sa classe de similitude est fermée.

Q 3) On suppose dans cette question que A a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{K}$. Soit $(M_k)_{k\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathscr{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

a) Soit $i \in \{1,2\}$.A l'aide de la suite $(\det(M_k - \lambda_i I_2))_{k\geqslant 0}$, montrer que $\det(B - \lambda_i I_2) = 0$.

b) En déduire que $B \in \mathscr{S}(A)$ et conclure que $\mathscr{S}(A)$ est fermée.

Q 4) On suppose dans cette question que A a une seule valeur propre λ dans $\mathbb{K}$ et que A n'est pas une matrice scalaire.

a) Montrer que A est trigonalisable, puis qu'elle est semblable à toute matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

b) En déduire que la classe de similitude de A n'est pas fermée.

Q 5) Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donner une condition nécessaire et suffisante simple portant sur A pour que $\mathscr{S}(A)$ soit fermée.

Q 6) Dans cette question, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

a) Montrer que le spectre réel de A est vide si, et seulement si, $4\det(A) - (\operatorname{tr}(A))^2 > 0$.
Dans la suite de la question 6, on suppose cette condition réalisée.

b) On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) est A. Montrer que $(e_1, u(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que la matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}$$

c) Soit $(M_k)_{k\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathscr{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que B a à la fois la même trace et le même déterminant que A. En déduire que $\mathscr{S}(A)$ est fermée.

Q 7) Conclure sur l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont la classe de similitude est fermée.

Partie II : matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont la classe de similitude est bornée

Q 8) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$. Montrer que si, pour tout $x \in \mathbb{K}^n, x$ et $u(x)$ sont liés, alors u est une homothétie.

Q 9) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice qui n'est pas une matrice scalaire et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé. Montrer qu'il existe un vecteur x de $\mathbb{K}^n$ tel que la famille $(x, u(x))$ est libre. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans la laquelle la matrice de u a pour première colonne $(0, \alpha, 0, \ldots, 0)^T$.

Q 10) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la classe de similitude d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ soit bornée.

Q 11) Existe-t-il une norme $\|.\|$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ invariante par similitude, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in GL_n(\mathbb{K}), \left\|PMP^{-1}\right\| = \|M\| ?$$

Partie III : matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est fermée

Dans cette section, A désigne une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Q 12) On suppose dans cette question que A est diagonalisable. Soit $(M_k)_{k \geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathscr{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que l'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C}_n[X] \\ M & \mapsto & \chi_M(X) \end{array} \right.$, qui à tout élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ associe son polynôme caractéristique, est continue.

b) Montrer que tout polynôme annulateur de A annule aussi B. En déduire que B est diagonalisable.

c) Conclure que $\mathscr{S}(A)$ est fermée.

Q 13) Bonus : Une autre démonstration du résultat de la Q 12 c)

a) Soit $r \in [\![0, n]\!]$. Montrer que $R_r = \{M \in M_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{rg}(M) \leq r\}$ est un *fermé* de $M_n(\mathbb{K})$.

b) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable.
On note $\mathcal{F}_A = \{B \in M_n(\mathbb{C}),\ \chi_B = \chi_A\}$ qui est bien un fermé de $M_n(\mathbb{C})$ par Q 12 a). Soit $B \in \mathcal{F}_A$, Montrer que B est semblable à A si, et seulement si, pour toute valeur propre $\lambda\ \in \mathrm{Sp}(A)$, on a : $\mathrm{rg}(B - \lambda I_n) \leq \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$.

c) En déduire que si A est diagonalisable, alors $\mathscr{S}(A)$ est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$.

Q 14) On suppose dans cette question que $\mathscr{S}(A)$ est fermée. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A, et on considère une base $(\ b_1, b_2 \ldots, b_n\ )$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. On notera $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ cette matrice.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathscr{B}_k = \left(b_1, \frac{b_2}{k}, \ldots, \frac{b_n}{k^{n-1}}\right)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ et écrire la matrice de u dans cette base en fonction des coefficients de T.

b) En déduire que A est diagonalisable.

Partie IV : une classe de similitude est toujours d'intérieur vide

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Q 15) On pose $\mathscr{T} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(A)\}$.

a) Quelle est la structure de $\mathscr{T}$? Montrer que $\mathscr{T}$ est d'intérieur vide.

b) En déduire que $\mathscr{S}(A)$ est d'intérieur vide.

Exercice

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \left(n \arctan\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \exp\left(\frac{1}{n}\right)$

Q 16) a) Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente. Pour la suite, on note $\ell = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

b) On note $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$. Déterminer, pour $N \to +\infty$, un développement asymptotique à deux termes significatifs de S_N.

Q 17) Déterminer, mieux, un développement asymptotique à trois termes significatifs de S_N.