Devoir surveillé 3 : solution

Problème (sujet de 2h EPITA MP MPI 2025)

N.B. Le sujet est donné quasiment sans modification, j'ai rajouté seulement la Q13 bonus, parce que c'est joli et pour rallonger un peu sur notre format de 3h pour ne pas laisser 1h sur l'exercice d'analyse (hum) !

Q 1) Si $A = \lambda I_n$ alors pour tout $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $PAP^{-1} = A$ et donc $\mathscr{S}(A) = \{A\}$.

Q 2) Pour tout $k \in \mathbb{K}$, on pose $E_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$.

a) Les matrices E_k et F_k sont inversibles puisqu'elles sont de déterminant 1. Par exemple avec la formule sur la comatrice en taille 2×2 : $E_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}$.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

La multiplication à gauche par E_k agit sur A comme l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + kL_2$.

$$E_kA = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{pmatrix}.$$

La multiplication à droite par E_{-k} agit comme l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - kC_1$

$$E_kAE_k^{-1} = \begin{pmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+kc & b-ka+kd-k^2c \\ c & d-kc \end{pmatrix}.$$

De même :

$$F_kA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ ka+c & kb+d \end{pmatrix}.$$

$$F_kAF_k^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ ka+c & kb+d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-kb & b \\ c+k(a-d)-k^2b & d+kb \end{pmatrix}.$$

c) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Comme toutes les normes sur $M_2(\mathbb{K})$ sont équivalentes, le caractère borné d'un ensemble est indépendant du choix de la norme. Considérons la norme infinie $||A||_\infty = \max(|a|,|b|,|c|,|d|)$.

• Si $b \neq 0$, alors la suite $(F_kAF_k^{-1})$ n'est pas bornée puisque $||F_kAF_k^{-1}||_\infty \geq |d+kb| \geq |kb| - |d| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

• Si $c \neq 0$ alors la suite $(E_kAE_k^{-1})$ n'est pas bornée puisque $||E_kAE_k^{-1}||_\infty \geq |a+kc| \geq |kc| - |a| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Donc déjà il est nécessaire, pour que $\mathscr{S}(A)$ soit bornée que $b = d = 0$.

Mais avec cette condition on a encore $||F_kAF_k^{-1}||_\infty \geq |c + k(a-d) + 0| \geq |k(a-d)| - |c|$. Donc si $a - d \neq 0$, $\mathscr{S}(A)$ est non bornée.

Donc il est nécessaire que $b = d = 0$ et $a = c$ autrement dit que $A = \lambda I$ pour que $\mathscr{S}(A)$ soit bornée.

Réciproquement si $A = \lambda I$, on a vu que $\mathscr{S}(A)$ est un singleton, donc elle est bornée. D'où l'équivalence.

Q 3) a) On sait que le déterminant est continu car c'est une fonction polynomiale en les entrées de la matrice, on sait que $(\det(M_k - \lambda_i I_2)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \det(B - \lambda_i I_2)$. Comme toutes les matrices M_k sont semblables à A, elles ont les mêmes v.p. que A. Donc $(\det(M_k - \lambda_i I_2)) = 0$. Par passage à la limite, on conclut bien que $\det(B - \lambda_i I_2) = 0$.

b) Par a) B admet deux v.p. distinctes λ_1 et λ_2 donc B est diagonalisable et semblable à $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. C'est aussi le cas de A. Donc A et B sont semblables entre elles car toutes les deux semblables à $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

On vient de vérifier la caractérisation séquentielle des parties fermées : pour toute suite $(M_k) \in \mathscr{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in M_2(\mathbb{K})$, on a montré que $B \in \mathscr{S}(A)$.

Q 4) a) Comme χ_A est un polynôme unitaire du second degré, avec une seule racine $\lambda \in \mathbb{K}$, on sait que $\chi_A = (X - \lambda)^2$.

Ainsi χ_A est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et A est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$. Ainsi il existe un $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que A soit semblable à $T_\alpha := \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Mais on est sûr que $\alpha \neq 0$ car sinon $A = \lambda I$ et on suppose que A n'est pas une matrice scalaire.

Montrons maintenant que T_α est semblable à T_1 et donc que toutes ces matrices sont semblables entre elles.

Soit $a \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = T_\alpha$ avec $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{K}^2$.

Alors dans la base $\mathcal{B}' = (\alpha e_1, e_2)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(a) = T_1$ et donc T_α est semblable à T_1 pour tout $\alpha \neq 0$.

b) Dans $\mathscr{S}(A)$ on a toutes les matrices $T_{1/n} := \begin{pmatrix} \lambda & 1/n \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Or $T_{1/n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda I$ et $\lambda I \notin \mathscr{S}(A)$ puisque λI n'est semblable qu'à elle-même.

Donc $\mathscr{S}(A)$ n'est pas fermée par la caractérisation séquentielle des fermés.

Q 5) Dans $M_2(\mathbb{C})$ on sait que toute matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ non scalaire est soit dans la situation de la Q3 ou bien dans celle de la Q4.

Donc par ces deux questions , pour A non scalaire, $\mathscr{S}(A)$ est fermée ssi A admet deux v.p. distinctes dans $\mathbb{C}$ ssi A est dz.

Or dans $M_2(\mathbb{C})$ une matrice est dz ssi elle a deux v.p. distinctes ou bien c'est une matrice scalaire.

Avec la Q1, on conclut que pour tout $A \in M_2(\mathbb{C})$, $\boxed{\mathscr{S}(A) \text{ est fermée ssi } A \text{ est dz}}$

Q 6) a) On sait que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = Z_{\mathbb{R}}(\chi_A)$ où $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$.

Et on sait donc que $Z_{\mathbb{R}}(\chi_A) = \varnothing$ ssi $\Delta(\chi_A) < 0$ ssi $\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A) < 0$.

b) Pour montrer que $\mathcal{C} = (e_1, u(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, il suffit de montrer qu'elle est libre puisque c'est une famille de deux vecteurs dans un espace de dimension deux.

Or si on avait $u(e_1) = \lambda e_1$ avec un $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λ serait une valeur propre réelle de u, ce qui n'existe pas ici.

Dans cette base $\mathcal{C}$ par définition de la représentation matricielle, l'égalité $u(e_1) = u(e_1)$ dit que la première colonne de $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $B = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 1 & f \end{pmatrix}$.

Mais alors $\mathrm{Tr}(B) = f$ or $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(A)$ car A et B sont semblables donc $f = \mathrm{Tr}(A)$.

De même $\det(B) = -e$ et $\det(B) = \det(A)$ donc $e = -\det(A)$.

D'où la forme annoncée pour B.

c) Par continuité de la trace (forme linéaire) et du déterminant (fonction polynomiale) on sait que $\mathrm{Tr}(M_k) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Tr}(B)$ et de même pour le déterminant.

Or $\mathrm{Tr}(M_k) = \mathrm{Tr}(A)$ pour tout k puisque les M_k sont semblables à A et donc $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$ par la limite ci-dessus.

De même $\det(A) = \det(B)$.

Mais alors $\mathrm{Tr}(B)^2 - 4\det(B) < 0$ et donc B est une matrice n'ayant aucune v.p. réelle et donc le b) s'applique pour montrer que B est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -\det(B) \\ 1 & \mathrm{tr}(B) \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}$ et donc B est semblable à A, donc $B \in \mathscr{S}(A)$.

On vient donc de vérifier la caractérisation séquentielle des parties fermées : (A) est fermée.

Q 7) Pour $A \in M_2(\mathbb{R})$ non scalaire, on vient de montrer que si $\Delta(\chi_A) < 0$, $\mathscr{S}(A)$ est fermée, à la Q4, on a vu que c'est le cas aussi si $\Delta(\chi_A) > 0$ et à la Q5, on a vu que si $\Delta(\chi_A) = 0$ en revanche $\mathscr{S}(A)$ est non fermée.

Conclusion : $\mathscr{S}(A)$ est fermée dans $M_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\Delta(\chi_A) \neq 0$ ou bien A est une matrice scalaire.

Q 8) **C'est le « miracle des homothéties »** Je donne ici une démonstration qui n'utilise pas une base et est valable même en dim. infinie. *L'énoncé original proposait de prendre une base. C'est la seule question du problème que j'ai modifié en enlevant cette indication*

soit $u \in \mathscr{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, $(x, u(x))$ liée.

Autrement dit, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe un $\lambda_x \in \mathbb{K}$, tel que $u(x) = \lambda_x x$.

Soit x, y dans $E \setminus \{0\}$, on va montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.

- 1ère cas : x et y sont linéairement indépendants. Dans ce cas, on considère $z = x + y$. Alors on a un $\lambda_z \in \mathbb{K}$ tel que

$$u(z) = \lambda_z . z = \lambda_z x + \lambda_z y \tag{1}$$

Mais d'autre part par linéarité de u, on a aussi :

$$u(z) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y . y \tag{2}$$

En comparant (1) avec (2), comme (x, y) est libre, on conclut que $\begin{cases} \lambda_z = \lambda_x \\ \lambda_z = \lambda_y \end{cases}$ et donc que $\lambda_x = \lambda_y$.

- Si $y = \mu x$. Alors $u(y) = u(\mu x) = \mu u(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x (\mu x) = \lambda_x y$. Ainsi $\lambda_x = \lambda_y$.

Ainsi on a montré que tous les λ_x pour $x \in E$ sont égaux et que u est bien une homothétie.

Q 9) Par contraposée de la question précédente si u n'est pas une homothétie, il existe un $x \in E$ tel que $u(x)$ n'est pas de la forme λx et ce x est donc forcément non nul. Donc $(x, u(x))$ libre.

Par théorème de la base incomplète, on peut alors fabriquer une base $(x, u(x), e_3, \dots, e_n)$ de E et dans cette base la matrice de u a pour première colonne $(010\dots0)^\top$.

Mais alors pour tout $\alpha \neq 0$, dans la base $(\alpha x, u(x), e_3, \dots, e_n)$ comme $u(\alpha x) = \alpha u(x)$ la première colonne devient bien $(0\alpha 0\dots0)^\top$ comme demandé.

Q 10) Si A n'est pas une matrice scalaire, la question précédente montre que la classe de similitude de A contient des matrices M_α de première colonne $(0\alpha 0\dots0)^\top$ pour $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Mais alors $\|M_\alpha\|_\infty \geq |\alpha|$. Donc pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $\|M_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $\mathscr{S}(A)$ est non bornée.

D'autre part si $A = \lambda I$, alors $\mathscr{S}(A)$ est un singleton donc bornée.

Conclusion : $\mathscr{S}(A)$ est bornée si, et seulement si, A est une matrice scalaire.

Q 11) *Par l'absurde* soit $\|\ \|$ une telle norme. Comme $M_n(\mathbb{K})$ est de dim. finie elle est équivalente à la norme infinie.

Donc si on fixe une matrice non scalaire A, il existe une suite $(P_k) \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $\|P_k A P_k^{-1}\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, en prenant les $P_k A P_k^{-1} = M_k$ de la question précédente.

Or par hyp $\|P_k A P_k^{-1}\| = \|A\|$, *contradiction.*

Q 12) a) (i) **Méthode assez élégante, plus simple à justifier qu'avec les fonctions composantes dans la base canonique :** On écrit χ_A dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ associée à l'interpolation de lagrange aux points $0, 1, \dots, n$.

Alors pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} P(k) L_k$. En particulier $\chi_A = \sum_{k=0}^{n} \chi_A(k) L_k$

Prouver la continuité de $A \mapsto \chi_A$ revient alors à prouver la continuité des applications composantes $A \mapsto \chi_A(k) = \det(kI - A)$. Mais là il s'agit seulement de la continuité du déterminant car l'application $A \mapsto kI - A$ est bien sûr continue (c'est juste une translation).

(ii) **Méthode plus brutale avec les composantes dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$**

Si on écrit $A = (C_1 \dots C_n)$ où les $\mathrm{C_i}$ sont les vecteurs colonnes de A, et $(E_i)_{i=1,\dots,n}$ la base canonique de $\mathrm{M_{n,1}}$(K) Alors : $\chi_A = \det(XE_1 - C_1, \dots, XE_n - C_n)$ qui après développement est égal à :

$$\chi_A = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \sum_{i=2}^{n-2}(-1)^{n+k}\lambda_k X^k + (-1)^{n+1}X\sum_{i=1}^{n}\det(C_1, \dots, C_{i-1}, E_i, C_i + 1, \dots, C_n) + (-1)^n\det(A)$$

$$\text{où } \lambda_k = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n}^{n} \det(C_1, \dots, E_{i_1}, \dots\dots, E_{i_k}, \dots, C_n)$$

Et là on voit bien que chaque λ_k est un polynôme en des entrées de A.

b- Attention, cette question n'utilise pas la précédente !

(i) Soit Q un polynôme annulateur de A. Alors pour $M_k = P_kAP_k^{-1}$, on a $Q(M_k) = P_kQ(A)P_k^{-1}$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Q(M_k) = 0 \quad (1)$.

D'autre part en notant $Q = \sum_{i=0}^{r}\alpha_i X^i$, on a $Q(M_k) = \sum_{i=0}^{r}\alpha_i M_k^i \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} Q(B) \quad (2)$ par opération sur les limites.

Donc avec (1) et (2), on a bien $Q(B) = 0$ comme demandé.

(ii) Application à la dz de B : par (i), avec $Q = \mu_A$, on a $\mu_A(B) = 0$ et comme μ_A est simplement scindé, on conclut que B est dz.

c) Là, on utilise les deux questions précédentes. Soit $B \in \overline{\mathscr{S}(A)}$. On a un suite (M_k) d'éléments de $\mathscr{S}(A)$ qui converge vers B.

Comme d'un côté $\chi_{M_k} = \chi_A$ pour tout A, et d'autre part, $\chi_{M_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_B$ par la question a) on sait que $\chi_A = \chi_B$.

Mais par la b) on sait que B est dz et A est dz et comme elles ont le même polynôme caractéristique, elles sont semblable à la même matrice diagonale (où les v.p. sont répétées autant de fois que leur multiplicité algébrique) et donc A et B sont semblables entre elles.

Donc $B \in \mathscr{S}(A)$.

On a donc bien montré l'égalité $\mathscr{S}(A) = \overline{\mathscr{S}(A)}$ ie $\mathscr{S}(A)$ est fermée.

Q 13) a) Pour toute parties I et J de $[\![1, n]\!]$ ayant le même nombre k d'éléments, notons $\Delta_{I,J}(A)$ le déterminant de la matrice obtenue en ne gardant que les lignes de A dont les indices sont dans I et les colonnes dont les indices sont dans J (mineur d'indice k de A).

Soit $r \le n - 1$. Alors $M \in \mathcal{R}_r$ ssi pour toutes les parties I et J à $r + 1$ éléments de $[\![1, n]\!]$, $\Delta_{I,J}(M) = 0$.

Donc $\mathcal{R}_r$ est l'intersection des ensembles $\Delta_{I,J}^{-1}(\{0\}$ qui sont tous fermés par continuité de ces déterminants.

Si $r = b$, $\mathcal{R}_r = M_n(\mathbb{C})$ qui est fermé dans lui-même.

b) Comme dit par l'énoncé $\mathcal{F}_A$ est un fermé de $M_n(\mathbb{C})$, car $\mathcal{F}_A = \chi^{-1}(\{\chi_A\})$ où χ est la fonction continue définie au 12 a).

Sens $\Rightarrow$: si B est semblable à A, alors elles représentent le même endomorphisme u dans des bases différentes et $\dim\ker(B - \lambda I) = \dim\ker(u - \lambda\,\mathrm{id}) = \dim\ker(A - \lambda\,\mathrm{id})$.

Sens $\Leftarrow$: si $B \in \mathcal{F}(A)$, vérifie la conditon $\mathrm{rg}(B - \lambda I_n) \le \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$ alors cette condition équivaut à $\dim\ker(B - \lambda I_n) \ge \ker(A - \lambda I_n)$ et comme la somme des s.e.v. propres de A fait E, celle des $\ker(B - \lambda I_n)$ aussi, ce qui montre que ces inégalités. sont égalités donc B est aussi diagonalisable avec les même v.p. et les mêmes dimensions de s.e.v. propres donc A et B sont semblables à la même matrice diagonale, donc A et B sont semblables. $\square$

c) Par la question question b), $\mathscr{S}(A) = \mathcal{F}_A \cap \bigcap_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}\{B \in M_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{rg}(B - \lambda I_n)\ \le \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)\}$. Par la question a) (et compte tenu du fait que $B \mapsto B - \lambda I$ est un homéomorphisme), chaque ensemble $\{B \in M_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{rg}(B - \lambda I_n)\ \le \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)\}$ est un fermé de $M_n(\mathbb{C})$. On conclut bien que $\mathcal{S}(A)$ est un fermé de $M_n(\mathbb{C})$.

Remarque : l'intérêt de cette démonstration est qu'elle dit en plus que $\mathscr{S}(A)$ est définie par des équations polynomiales.

Q 14) a) Par définition, comme T est triangulaire supérieure, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$u(b_j) = \sum_{i=1}^{j} t_{i,j} b_i$$

Donc aussi

$$u(b_j) = \sum_{i=1}^{j} t_{i,j} k^{i-1} \frac{b_i}{k^{i-1}}.$$

et

$$u(\frac{b_j}{k^{j-1}}) = \sum_{i=1}^{j} t_{i,j} \frac{k^{i-1}}{k^{j-1}} \frac{b_i}{k^{i-1}} = \sum_{i=1}^{j} \frac{t_{i,j}}{k^{j-i}} \left(\frac{b_i}{k^{i-1}} \right)$$

Donc en notant T_k la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_k$, on a encore T_k triangulaire et pour tout $i \leq j$,

$$T_k(i,j) = \frac{t_{i,j}}{k^{j-i}}$$

b) **Conséquence du a)** pour $i < j$, $T_k(i,j) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc $T_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \operatorname{diag}(t_{1,1}, \ldots, t_{n,n}) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ où $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$.

Or toutes les matrices T_k sont semblables à A, donc on vient de montrer que,*pour toute matrice complexe A, la matrice* $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *où les λ_i sont les v.p. de A répétées avec leurs multiplicités algébriques, est dans $\overline{\mathscr{S}(A)}$.*

Si maintenant on suppose que $\mathscr{S}(A)$ est fermée, on conclut que $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est dans $\mathscr{S}(A)$ donc que A est diagonalisable.

Q 15) a) (i) Soit $\mathscr{H} = \{N \in M_n(\mathbb{K}),\ \operatorname{Tr}(N) = 0\} = \ker(\operatorname{Tr})$. On sait que $\mathscr{H}$ est un hyperplan vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ comme noyau d'une forme linéaire.

Ici toujours par linéarité de la trace, $\mathscr{T} = A + \mathscr{H} := \{A + N,\ N \in \mathscr{H}\}$.

En effet $M \in \mathscr{T} \Leftrightarrow \operatorname{Tr}(M - A) = 0 \Leftrightarrow M - A \in \mathscr{H} \Leftrightarrow M = A + \mathscr{H}$.

Ainsi, par définition, $\mathscr{T}$ est un *sous-espace affine* de direction vectorielle $\mathscr{H}$ (c'est un hyperplan affine de $M_n(\mathbb{K})$.) Topologiquement c'est un fermé de $M_n(\mathbb{K})$ comme préimage de $\{\operatorname{Tr}(A)\}$ par l'application Tr qui est continue car linéaire.

(ii) Comme la translation $\tau_A : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$, $N \mapsto A + N$ est un *homéorphisme* il est équivalent de montrer que $\mathscr{T}$ est d'intérieur vide ou que $\mathscr{H}$ est d'intérieur vide. On fixe une norme sur $M_n(\mathbb{K})$.

Or *par l'absurde*, si on a une matrice $N \in \mathscr{H}$ et un $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte $B_o(N, \varepsilon)$ soit incluse dans $\mathscr{H}$, alors comme H est stable par la soustraction par N, on a aussi $B_0(0, \varepsilon) \subset \mathscr{H}$

Mais alors pour toute matrice A non nulle, la matrice $\varepsilon A/2\|A\|$ est de norme $\varepsilon/2$ donc dans $\mathscr{H}$ et comme $\mathscr{H}$ est stable par la loi externe, $\mathscr{H}$ contient A.

Conclusion $\mathscr{H}$ contient toutes les matrices non nulle de $M_n(\mathbb{K})$, et bien sûr aussi la matrice nulle donc $\mathscr{H} = M_n(\mathbb{K})$ *Contradiction puisqu'il y a des matrices de trace non nulle* . Donc $\mathscr{T}$ est d'intérieur vide.

b) Pour tout $M \in \mathscr{S}(A)$, on a $\operatorname{Tr}(M) = \operatorname{Tr}(A)$ donc $\mathscr{S}(A) \subset \mathscr{T}$.

Donc $Int(\mathscr{S}(A)) \subset Int(\mathscr{T})$ et donc par la question précédente $\mathscr{T}$ est d'intérieur vide donc $\mathscr{S}(A)$ aussi . □

Exercice

Q 16) a) On sait que $\operatorname{Arctan}(x) = x + O(x^3)$ pour $x \to 0$ donc $\operatorname{Arctan}(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^3})$. Donc $n \operatorname{Arctan}(\frac{1}{n})) - 1 = -O(1/n^2)$.

D'autre part $\exp(1/n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n \operatorname{Arctan}(\frac{1}{n})) - 1$ donc $a_n = O(1/n^2)$ donc par théorème de comparaison (comparaison à l'exemple de Riemann), la série de terme général (a_n) est *absolument convergente*

b) Cette fois, on a besoin d'un *équivalent* de a_n, ce qui, comme vu à la question précédente, se ramène à un équivalent $n\,\mathrm{Arctan}(\frac{1}{n})) - 1$.
Or $\mathrm{Arctan}(x) = x - x^3/3 + O(x^5)$ donc $\mathrm{Arctan}(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + O(\frac{1}{n^5})$.
Donc $n\,\mathrm{Arctan}(1/n) - 1 = -\dfrac{1}{3n^2} + O(\dfrac{1}{n^3})$.
Ainsi $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{3n^2}$.
Par théorème de sommation des équivalents, pour les termes généraux de signe constant, appliqué aux restes dans le cas convergent, on sait alors que

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} -\frac{1}{3k^2}.$$

Or par encadrement par des intégrales,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$$

donc

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

donc

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$$

On conclut par théorème des gendarmes que ;

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

et ici ;

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{3n}$$

On a donc le développement asymptotique $S_N = \ell - R_N = \ell + \dfrac{1}{3N} + o(\dfrac{1}{N})$.

Q 17) Pour gagner un terme supplémentaire : on pose $v_n = R_n + \dfrac{1}{3n}$.
Alors $v_n - v_{n-1} = R_n - R_{n-1} + \dfrac{1}{3n} - \dfrac{1}{3(n-1)} = -a_n + \dfrac{1}{3n} - \dfrac{1}{3n}(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3} + o(\dfrac{1}{n^3}))$.
Donc

$$v_n - v_{n-1} = -a_n - \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{3n^4} + o(\frac{1}{n^4}) \quad (1)$$

Si on est allé aussi loin dans le D.L. c'est que d'autre part en faisant un DL de a_n :
D'un côté $\mathrm{Arctan}(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{5n^5}) + O(\frac{1}{n^7})$.
Donc $n\,\mathrm{Arctan}(\frac{1}{n}) - 1 = -\frac{1}{3n^2} + \frac{1}{5n^4} + O(\frac{1}{n^6})$.
D'autre part $\exp(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{24n^4} + O(\frac{1}{n^5})$.
On fait le produit des deux D.L :

$$a_n = -\frac{1}{3n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{6n^4} + \frac{1}{5n^4} + O(\frac{1}{n^5}) = -\frac{1}{3n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{30n^4} + O(\frac{1}{n^4}) \quad (2)$$

Avec (1) et (2) :

$$v_n - v_{n-1} = \frac{1}{3n^4} + \frac{1}{30n^4} + O(\frac{1}{n^5}) = \frac{11}{30n^4} + O(\frac{1}{n^4})$$

Ainsi $v_n - v_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{11}{30n^4}$.
On applique une nouvelle fois le théorème de sommation des équivalents pour les restes de séries convergentes (t.g. de signe constant)

Donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} v_k - v_{k-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{11}{30} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \qquad (**)$$

La même technique d'encadrement par des intégrales montre que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n^3}$.

Ceci dans $(**)$ où le premier membre est télescopique donne :

$$v_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{11}{90n^3}$$

et donc aussi

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{11}{90(n-1)^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{11}{90n^3}$$

Autrement dit $R_n + \dfrac{1}{3n} = \frac{11}{90n^3} + o(\frac{1}{3n^3})$.

Et avec les notations de l'énoncé :

$$S_N = \ell - R_N = \ell + \frac{1}{3N} - \frac{11}{90N^3} + o(\frac{1}{N^3})$$