Devoir surveillé 2 (4h)

Dans ce problème, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Partie I : définition des projecteurs spectraux

Q 1) Un exemple

a) Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

b) Démontrer que $\Pi_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteur.

c) calculer $\Pi_1 + 5\Pi_2, \Pi_1 + \Pi_2$ et $\Pi_1\Pi_2$.

On rappelle le lemme de décomposition des noyaux : Si $P_1, P_2, \ldots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à T, si u est un endomorphisme de E alors :

$$\operatorname{Ker}[T(u)] = \operatorname{Ker}(P_1(u)) \oplus \operatorname{Ker}(P_2(u)) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker}(P_r(u)).$$

Q 2) L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier $r = 2$. Soit u un endomorphisme de E et soit P et Q deux polynômes premiers entre eux. Justifier que $\operatorname{Ker}(P(u)) \subset \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\operatorname{Ker}(Q(u)) \subset \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$).
Démontrer que : $\operatorname{Ker}[(PQ)(u)] = \operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u))$.

Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

Q 3) Soit u un endomorphisme de E et soit π_u son polynôme minimal.

a) On suppose que $\pi_u = P_1^{k_1}P_2^{k_2}$ où les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier $i \in \{1,2\}, Q_i = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$. Justifier qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$.

b) Pour la suite de cette partie, on notera $\pi_u = {P_1}^{k_1}{P_2}^{k_2}\ldots{P_m}^{k_m}$ la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal. Ainsi $P_i = X - \lambda_i$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de u. Montrer que, si pour tout entier $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, on note $Q_i = \frac{\pi_u}{{P_i}^{k_i}}$, alors

$$\exists (R_1, \ldots, R_m) \in \mathbb{C}[X]^m,\ R_1Q_1 + R_2Q_2 + \ldots + R_mQ_m = 1.$$

Q 4) On pose alors pour tout entier $i \in \{1,2,\ldots,m\}, p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$. Démontrer que pour tout couple (i,j) d'entiers distincts de $\{1,2,\ldots,m\}$, on a les trois résultats suivants :
$p_i \circ p_j = 0$, $\quad \sum_{i=1}^m p_i = id_E$ $\quad$ et chaque p_i est un projecteur de E.
Les p_i seront appelés **projecteurs spectraux associés à** u.

Q 5) Soit u un endomorphisme de E et soit χ_u son polynôme caractéristique : $\chi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ (avec les λ_i deux à deux distincts et les α_i des entiers naturels non nuls) et pour tout entier $i \in \{1,2,\ldots,m\}, N_i = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$. Justifier que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_m$.

Q 6) a) Démontrer que $E = \operatorname{Im} p_1 \oplus \operatorname{Im} p_2 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} p_m$.

b) Démontrer que : $\forall\ i \in \{1,2,\ldots,m\}, \operatorname{lm} p_i = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i} = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{k_i}$ et donc que les p_i sont aussi les projecteurs associés à la décomposition de la Q5.

Partie II : étude du cas particulier où u est diagonalisable

Dans ce II, on suppose que u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ses valeurs propres.

Q 7) Quel est alors le polynôme minimal π_u de u ?

Q 8) On note toujours, pour tout entier $i \in \{1,2,\ldots,m\}, Q_i = \frac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X - \lambda_i$, et on pose $\theta_i = \frac{1}{Q_i(\lambda_i)}$. Donner la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\pi_u}$ puis démontrer que les projecteurs spectraux associés à u sont, pour tout entier $i \in \{1,2,\ldots,m\}, p_i = \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

Q 9) Démontrer que $X = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$ puis que $u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$ (décomposition spectrale de u). Retrouver cette dernière égalité à l'aide de la question 6) b).

Q 10) Exemple : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice A^2.

b) En déduire le polynôme minimal π_A de la matrice A puis les matrices Π_1 et Π_2 des projecteurs spectraux associés à A.

c) Calculer, pour tout entier naturel q, A^q en fonction des matrices Π_1 et Π_2.

Q 11) On note $\mathbb{C}[v]$ l'algèbre des polynômes d'un endomorphisme v d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Démontrer que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[v]$ est égal au degré du polynôme minimal π_v de l'endomorphisme v.

Q 12) On revient au cas u diagonalisable avec $\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$. Démontrer que la famille $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ des projecteurs spectraux associés à u est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$.

Q 13) Dans le cas d'un endomorphisme u non diagonalisable, la famille $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ des projecteurs spectraux associés à u est-elle toujours une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$?

Q 14) Nous avons vu que si u est un endomorphisme de E diagonalisable, il existe m endomorphismes non nuls p_i de E, tels que pour tout entier q on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i{}^q p_i$. Nous allons étudier une « réciproque». Soit u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe m endomorphismes non nuls f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ distincts, tels que pour tout entier naturel q on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q . f_i$. Démontrer que u est diagonalisable.

Partie III : étude dans le cas général

On considère $u \in \mathscr{L}(E)$ quelconque et comme au § I, son polynôme minimal $\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{k_i}$.

On note alors comme au § I, $P_i = (X - \lambda_i)$, et $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$ pour $i = 1, \ldots, m$.

Q 15) A partir de la décomposition en éléments simples de $1/\pi_u$ qu'on note : $\dfrac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} \dfrac{c_{i,j}}{(X - \lambda_i)^j}$

donner une formule explicite pour des polynômes R_i tels que $\sum_{i=1}^{m} R_i Q_i = 1$.

On définit alors les *projecteurs spectraux* par $\forall\, i \in [\![1, m]\!]$, $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$ comme à la Q4.

Q 16) On note alors $d \coloneqq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$ et $n \coloneqq u - d$. Montrer que d est diagonalisable et n est nilpotent et que $d \circ n = n \circ d$.

Cette décomposition $u = d + n$, très utile, s'appelle décomposition de Dunford et son existence est aussi une conséquence directe du cours du R3. Mais l'intérêt du point de vue des Q15 et Q16) est d'avoir une méthode de *calcul effectif* de cette décomposition comme le montre l'exemple suivant :

Q 17) Soit $E = \mathbb{C}^4$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ de matrice canoniquement associée : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$

a) Calculer le polynôme caractéristique χ_A et le polynôme minimal π_A.

b) A l'aide de la décomposition en éléments simples de $1/\pi_A$ calculer les matrices des projecteurs spectraux de A.

c) En déduire les matrices D et N donnant la décomposition de Dunford de A (associées aux endomorphismes d et n donnant la décomposition de Dunford de u).

d) En déduire le calcul de A^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ à partir de $(D + N)^k$.