Devoir surveillé 2 : Pb CCINP MP 2023 solution

N.B. *Dans l'épreuve CCINP question ce pb était précédé de deux exercices et formé des Parties I et II du sujet de ce DS. La Partie III ne figurait pas dans l'épreuve de concours : c'est un rajout pour permettre de mieux comprendre l'intérêt des projecteurs spectraux. L'intérêt des résultats généraux des Q5 et Q6 est mieux compris avec cette partie III.*

Q 1) a) **(M1)** On calcule $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 6X + 5 = (X-1)(X-5)$. Ainsi la matrice A a deux valeurs propres distinctes et est de taille 2, elle est donc diagonalisable.

(M2) La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle donc elle est diagonalisable.

b) On calcule $\Pi_1^2 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1\times 1 + (-1)\times(-1) & 1\times(-1) + (-1)\times 1 \\ (-1)\times 1 + 1\times(-1) & (-1)\times(-1) + 1\times 1 \end{pmatrix} = \Pi_1$.

Et de même $\Pi_2^2 = \Pi_2$ ainsi Π_1 et Π_2 sont des matrices de projecteur.

c) Par addition entrée par entrée, on voit que $\Pi_1 + 5\Pi_2 = A, \Pi_1 + \Pi_2 = I_2$.

Par produit $\Pi_1\Pi_2 = 0$

Q 2) (i) Soit $x \in \mathrm{Ker}(P(u))$ donc $P(u)(x) = 0$ et $(QP)(u) = Q(u)\circ P(u)$ donc

$$[(QP)(u)](x) = Q(u)(P(u)(x)) = 0$$

ce qui donne $x \in \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$, ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(P(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]}$ (de même, on a : $\mathrm{Ker}(Q(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$).

(ii) On applique le théorème de Bézout : comme $P \wedge Q = 1$, il existe $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tels que $AP + BQ = 1$. Ce qui donne, en évaluant en u :

$$\mathrm{Id}_E = (AP+BQ)(u) = A(u)\circ P(u) + B(u)\circ Q(u)$$

Donc si $x \in \ker P(u) \cap \ker Q(u)$, on a :

$$\begin{aligned} x &= (A(u)\circ P(u))(x) + (B(u)\circ Q(u))(x) \\ &= \underbrace{A(u)(P(u)(x))}_{=0} + \underbrace{B(u)(Q(u)(x))}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\ker P(u) \cap \ker Q(u) = \{0\}.}$

(iii) Avec le (i) et comme $\ker(PQ)(u)$ est un sous-espace vectoriel, on sait que

$\boxed{\ker P(u) + \ker Q(u) \subset \ker(PQ)(u).}$

(iv) Montrons l'inclusion réciproque : si $x \in \ker(P.Q)(u)$, alors :

$$x = \underbrace{(A(u)\circ P(u))(x)}_{\in \ker Q(u)} + \underbrace{(B(u)\circ Q(u))(x)}_{\in \ker P(u)}.$$

En effet, $Q(u)(P(u)\circ A(u)(x)) = (A(u)\circ(P.Q)(u))(x) = 0$ et $P(u)(Q(u)\circ B(u)(x)) = (B(u)\circ(P.Q)(u))(x) = 0$. Donc

$\boxed{\mathrm{Ker}[(PQ)(u)] \subset \mathrm{Ker}(P(u)) + \mathrm{Ker}(Q(u))}$

(v) Avec (ii), (iii), (iv) on a montré que

$$\boxed{\mathrm{Ker}[(PQ)(u)] = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u)).}$$

Q 3) a) On a $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$, donc $Q_1 = P_2^{k_2}$ et $Q_2 = P_1^{k_1}$.
Comme P_1 et P_2 sont premiers entre eux, on en déduit que Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux, le théorème de Bézout donne l'existence deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 = 1$.
b) **N.B.** Le résultat de ce b) état admis dans le sujet CCINP mais elle **n'est pas beaucoup plus difficile!** On applique encore théorème de Bézout car les $Q_i = \prod_{j \neq i} P_j^{k_j}$ sont *premiers entre eux dans leur ensemble* (il n'y a pas de facteur irréductible commun à tous les Q_i) ce qui est bien l'hypothèse du théorème de Bézout.

Q 4) (i) Il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 + \ldots + R_m Q_m = 1$ et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$ donc

$$R_1(u) \circ Q_1(u) + \ldots + R_m(u) \circ Q_m(u) = id_E$$

par suite $\boxed{\sum_{i=1}^m p_i = id_E}$.
(ii) Soit i, j des entiers distincts de $\{1, 2, \ldots, m\}$, on a

$$\begin{aligned} p_i \circ p_j &= R_i(u) \circ Q_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_j(u) \\ &= R_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_i(u) \circ Q_j(u) \\ &= (R_i R_j)(u) \circ (Q_i Q_j)(u) \quad (*) \end{aligned}$$

et $Q_i Q_j = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}} \frac{\pi_u}{P_j^{k_j}} = \pi_u \cdot \frac{\pi_u}{P_i{}^{k_i} P_j{}^{k_j}}$, or $P_i{}^{k_i} P_j{}^{k_j}$ divise π_u, donc

$$Q_i Q_j = \pi_u S \quad \text{avec } S := \frac{\pi_u}{P_i{}^{k_i} P_j{}^{k_j}} \in \mathbb{C}[X].$$

Ainsi π_u divise $Q_i Q_j$, donc $Q_i Q_j$ est donc annulateur de u d'où avec $(*)$: $\boxed{p_i \circ p_j = 0}$.
(iii) Soit i dans $\{1, 2, \ldots, m\}$, on a

$$\begin{aligned} p_i &= p_i \circ id_E \\ &= p_i \circ \sum_{j=1}^m p_j \\ &= p_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m p_i \circ p_j \end{aligned}$$

or si $i \neq j$ on a $p_i \circ p_j = 0$ donc $\boxed{p_i^2 = p_i}$, et p_i est un projecteur .

Q 5) *Il s'agit du question de cours (cours du chap. R3) et par ailleurs application immédiate de Cayley-Hamilton et du théorème de décomposition des noyaux*
On a $\chi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, N_i = \ker (u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$. Les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux, le théorème de décomposition des noyaux donne

$$\ker \chi_u(u) = \bigoplus_{i=1}^m \ker (u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$$

d'après le théorème de Cayley-Hamilton on a $\chi_u(u) = 0$ donc $\ker \chi_u(u) = E$ d'où

$$E = \bigoplus_{i=1}^m N_i$$

Q 6) a) (i) Montrons que la somme $\operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$ est directe : Soit $(y_1, \ldots, y_m) \in \operatorname{Im} p_1 \times \ldots \times \operatorname{Im} p_m$ tels que $y_1 + \ldots + y_m = 0$, il existe $x_1, \ldots, x_m$ dans E verifiant $y_i = p_i(x_i)$ pour tout i dans $\{1, \ldots, m\}$. Soit i, j distincts dans $\{1, \ldots, m\}$ alors

$$p_i(y_j) = (p_i \circ p_j)(x_j) = 0 \text{ et } p_i(y_i) = (p_i \circ p_i)(x_i) = p_i(x_i) = y_i$$

ce qui donne

$$p_i(y_1) + \ldots + p_i(y_m) = y_i = 0$$

donc $(y_1, \ldots, y_m) = (0, \ldots, 0)$, ce qui prouve que la somme $\operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$ est directe

(ii) Montrons que $E = \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$:

On a $\operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m \subset E$ et $p_1 + \ldots + p_m = id_E$ donc pour tout x dans E on a $x = p_1(x) + \ldots + p_m(x)$ donc $x \in \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$ par suite $E \subset \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$, d'où $E = \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$.

Ainsi avec (i) et (ii) on a $\boxed{E = \operatorname{Im} p_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} p_m}$

b) **Remarque :** D'après le théorème de Cayley-Hamilton on a π_u divise $\chi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et π_u et χ_u ont les mêmes racines, donc $\pi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{k_i}$ avec $0 < k_i \leq \alpha_i$.

(i) En particulier, pour tout i, $\boxed{\ker(u - \lambda_i \operatorname{id})^{k_i} \subset \ker(u - \lambda_i \operatorname{id})^{\alpha_i} =: N_i \quad (1)}$

(ii) *Soit* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *montrons que* $\operatorname{Im} p_i \subset \ker(u - \lambda_i \operatorname{id})^{k_i}$ *:*

soit $y_i = p_i(x_i) \in \operatorname{Im} p_i$.

On veut montrer que $y_i \in \ker(u - \lambda_i \operatorname{id})^{k_i}$.

Or comme $y_i = p_i(y_i) = R_i(u) \circ Q_i(u)(y_i)$, on a $P_i^{k_i}(y_i) = (R_i \times P_i^{k_i} \times Q_i)(u)(y_i) \quad (*)$.

Mais $P_i^{k_i} \times Q_i = \pi_u$ par déf. des Q_i.

Donc avec $(*)$, on a : $P_i^{k_i}(y_i) = R_i(u)(\pi_u(u))(y_i) = 0$ puisque $\pi_u(u) = 0$.

Ainsi on a montré l'inclusion : $\boxed{\operatorname{Im} p_i \subset \ker(u - \lambda_i \operatorname{id})^{k_i} \quad (2)}$

(iii) Par Q6 a) et Q5, $E = \operatorname{Im} p_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} p_m = N_1 \oplus \ldots \oplus N_m$ donc

$$\dim(\operatorname{Im} p_1) \oplus \ldots \oplus \dim(\operatorname{Im} p_m) = \dim(N_1) \oplus \ldots \oplus \dim(N_m)$$

Supposons qu'il existe $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tel que $\operatorname{Im} p_i \neq N_i$ donc $\dim(\operatorname{Im} p_i) < \dim(N_i)$ par suite

$$\dim(\operatorname{Im} p_1) \oplus \ldots \oplus \dim(\operatorname{Im} p_m) < \dim(N_1) \oplus \ldots \oplus \dim(N_m)$$

ce qui est absurde donc $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ on a $\dim(\operatorname{Im} p_i) = \dim(N_i)$ et avec (1) et (2 on conclut que pour tout i :

$$\boxed{\operatorname{Im} p_i = \ker(u - \lambda_i \operatorname{id})^{k_i} = \ker(u - \lambda_i \operatorname{id})^{\alpha_i} =: N_i.}$$

Partie II

Q 7) u est diagonalisable donc son polynôme minimal est scindé à racines simples, et l'ensemble de ses racines est exactement le spectre de u d'où :

$$\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$$

Q 8) (i) Comme π_u a toutes ses racines simples, on sait par théorème de décomposition en éléments simples qu'il existe des constantes $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ telles que

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{X - \lambda_i}$$

avec $a_i = \left[\widetilde{\frac{X - \lambda_i}{\pi_u(X)}}\right](\lambda_i) = \left[\frac{1}{Q_i(X)}\right](\lambda_i) =: \theta_i$ donc

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i}{X - \lambda_i}$$

(ii) Cette relation, multipliée par π_u donne la relation de Bézout suivante (un peu particulière car les θ_i sont constants) :

$$1 = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \frac{\pi_u}{X - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{m} \theta_i Q_i$$

donc suivant les notations données avant la Q4, avec les $R_i = \theta_i$ constants, on a pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, p_i = \theta_i Q_i(u) = \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

Q 9) a) On considère la D.E.S. de $\frac{X}{\pi_u(X)}$ qu'on écrit :

$$\frac{X}{\pi_u(X)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{X - \lambda_i}$$

avec

$$c_i = \left(\frac{X\,(X - \lambda_i)}{\pi_u}\right)(\lambda_i) = \left(\frac{X}{Q_i(X)}\right)(\lambda_i) = \frac{\lambda_i}{Q_i\,(\lambda_i)}$$

Donc

$$X = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{Q_i\,(\lambda_i)} \frac{\pi_u(X)}{(X - \lambda_i)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{Q_i\,(\lambda_i)} Q_i(X)$$

Alors en évaluant cette égalité en u, on obtient :

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{Q_i(u)}{Q_i\,(\lambda_i)} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i.$$

b) Point n'est besoin de toutes ces manipulations pour arriver à cette dernière égalité géométriquement évidente : ici les $\mathrm{Im}(p_i)$ sont les $\ker(u - \lambda_i \,\mathrm{id})$ et les p_i sont les projecteurs associés à la décomposition de E en sous-espaces propres. L'égalité $u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$ est alors immédiate. Elle dit juste que si $x = \sum_{i=1}^{m} x_i$ avec $x_i \in E_{\lambda_i}$ alors $u(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$.

Q 10) .

a) On calcule : $A^2 = 4I_4$.

b) (i) Par a) $X^2 - 4$ est annulateur de A et π_A divise $X^2 - 4, A$ n'est pas de la forme αI_4 donc forcement $\deg \pi_A \geq 2$ par suite $\pi_A = X^2 - 4$.

(ii) Calcul des projecteurs associés (projecteurs spectraux) : avec les notations de la Q3, comme $X^2 - 4 = (X-2)(X+2)$ avec $P_1(X) = (X-2)$ et $P_2(X) = X+2$, on a $Q_1(X) = X+2$ et $Q_2(X) = X-2$. On note donc aussi $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -2$.

Alors par la dernière formule de la Q8,

$$\Pi_1 = \frac{Q_1(A)}{Q_1(\lambda_1)} = \frac{1}{4}(A + 2I) \quad \text{et} \quad \Pi_2 = \frac{Q_2(A)}{Q_2(\lambda_2)} = \frac{1}{-4}(A - 2I)$$

On trouve :

$$\Pi_2 = \frac{1}{4}\,(-A + 2I_4) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}\,(A + 2I_4) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

c) On a les relations :

$A = \lambda_1 \Pi_1 + \lambda_2 \Pi_2$

$\Pi_1 \cdot \Pi_2 = \Pi_2 \cdot \Pi_1 = 0$

$\Pi_1^k = \Pi_1, \Pi_2^k = \Pi_2$ pour tout entier naturel $k > 0$.

On obtient pour tout entier naturel $k > 0$:

$$A^k = \lambda_1^k \Pi_1 + \lambda_2^k \Pi_2$$

donc

$$\boxed{A^k = 2^k\Pi_1 + (-2)^k\Pi_2 = 2^k\left(\Pi_1 + (-1)^k\Pi_2\right).}$$

Ces égalités sont aussi valables pour $k = 0$ puisque $\Pi_1 + \Pi_2 = I$.

Remarque ; on retrouve ainsi aussi les égalités plus évidentes suivantes : pour tout entier naturel k

$$A^{2k} = 4^k I_4 \text{ et } A^{2k+1} = 4^k A$$

Q 11) On a $\mathbb{C}[v] = \{P(v), P \in \mathbb{C}[X]\}$, posons $\pi_v(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + .. + a_0$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ on effectue la division euclidienne de P par π_v :

$$P = Q\pi_v + R \text{ avec } \deg R \leq d-1$$

par substitution on a

$$P(v) = Q(v) \circ \pi_v(v) + R(v) = R(v)$$

donc $P(v) \in \operatorname{vect}\left\{id_E, v, \ldots, v^{d-1}\right\}$ et $\mathbb{C}[v] \subset \operatorname{vect}\left\{id_E, v, \ldots, v^{d-1}\right\}$. Par suite $\dim \mathbb{C}[v] \leq d$. Si on suppose que $\dim \mathbb{C}[v] \leq d-1$ alors la famille $\left\{id_E, v, \ldots, v^{d-2}\right\}$ est liée ainsi il existe un polynôme annulateur de v de degré inferieur à $d-1$ ce qui contredit le fait que, π_v est annulateur de degré minimal égal à d. Donc $\dim \mathbb{C}[v] = d$.

Q 12) On a $\deg \pi_u = m$ puisque $\pi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$.
Donc par la question précédente, $\dim \mathbb{C}[u] = m$ et la famille $(p_1, \ldots, p_m)$ a bien le bon nombre de vecteurs pour être une base.
Il suffit donc de montrer que la famille $(p_1, \ldots, p_m)$ est libre : Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ dans $\mathbb{C}^m$ tels que $\alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_m p_m = 0$, on compose par p_j, sachant que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et $p_i \circ p_i = p_i$, on obtient $\alpha_j = 0$, ainsi $(p_1, \ldots, p_m)$ est libre. $(p_1, \ldots, p_m)$ est libre de cardinal m donc c'est une base de $\mathbb{C}[u]$.

Q 13) Si u non diagonalisable alors $\pi_u = \prod_{i=1}^m (X-\lambda_i)^{\nu_i}$ avec au moins l'un des $\nu_i > 1$ donc $\deg \pi_u > m$. Or $\mathbb{C}[u]$ est toujours de dimension $\deg(\pi_u)$ donc la famille $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ n'est pas génératrice $\mathbb{C}[u]$. A fortiori ce n'est pas une base de $\mathbb{C}[u]$.

Q 14) On a m endomorphismes f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ distincts, tels que pour tout entier naturel q on ait $u^q = \sum_{i=1}^m \lambda_i^q f_i$. Donc par combinaison linéaire de ces égalités, pour tout polynôme P on a $P(u) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) f_i$, en particulier le polynôme $P = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$ est annulateur de u à racines simples, donc u est diagonalisable.

Partie III :

Q 15) On réécrit la D.E.S. de $1/\pi_u$ en réduisant au même dénominateur dans chaque somme intérieure :

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^m \frac{R_i(X)}{(X-\lambda_i)^{k_i}} \quad (1)$$

avec pour chaque $i = 1, \ldots, m$,

$$R_i = \sum_{j=1}^{k_i} c_{i,j}(X-\lambda_i)^{k_i - j} \quad (2)$$

En multipliant (1) par π_u, on obtient l'identité de Bézout :

$$1 = \sum_{i=1}^m R_i(X)\frac{\pi_u}{(X-\lambda_i)^{k_i}} = \sum_{i=1}^m R_i(X)Q_i(X)$$

comme demandée, et la formule explicite sur les R_i est donnée par (2).

Q 16) Les résultats des Q5 et Q6 s'appliquent ici et chaque $(p_1, \ldots, p_m)$ sont les projecteurs associés à la décomposition de E sur les sous-espaces caractéristiques N_i.
Pour $d = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$ on a pour chaque $j = 1, \ldots, m$, $d_{|N_j} = \lambda_j \operatorname{id}$ donc N_j est les sev propre de d pour la valeur propre λ_j et comme $E = \oplus_{i=1}^m N_j$, on a bien d diagonalisable.

Pour $n = u - d$, montrons que n est nilpotent : $n_{|N_j} = (u - \lambda_j \,\mathrm{id})_{|N_j}$ or $N_j = \ker(u - \lambda_j \,\mathrm{id})^{k_j}$ donc $n_{|N_j}$ est nilpotent d'indice au plus k_j.

Au total n est nilpotent d'indice $\max(k_1, \dots, k_m)$.

Enfin n et d commutent parce que par construction des p_k sont dans $\mathbb{C}[u]$ donc d et n sont dans $\mathbb{C}[u]$.

Q 17) a) On calcule $\chi_A(X) = (X-1)^3 X$. Donc $\mu_A(X) = (X-1)^k X$. A la calculatrice on constate que $(X-1)X$ n'annule pas A mais que $(X-1)^2 X$ oui donc $\mu_A(X) = (X-1)^2 X$.

b) On calcule la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{\pi_A(X)} = \frac{1}{X} + \left(\frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1}\right)$$

qui donne la décomposition de Bézout :

$$1 = (X-1)^2 + \left(2X - X^2\right)$$

et les projecteurs spectraux :

$$\Pi_1 = (A - I_4)^2, \quad \Pi_2 = 2A - A^2$$

(on a $\Pi_1 + \Pi_2 = I_4$).

c) On obtient alors la décomposition $A = D + N$ avec :

$$D = 0\Pi_1 + \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = A - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Pour $r > 0$, on a par la formule du binôme puisque D et N commutent

$$A^r = D^r + rD^{r-1}N$$

(car $N^2 = 0$) avec $D^r = \pi_2^r = \pi_2 = D$. Soit :

$$\forall r \geq 2, \quad A^r = D\,(I_4 + rN) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$