Devoir surveillé 1 : solution

Exercice

a) Cf cours : ne pas oublier d'initialiser la récurrence. Si vous initialiser pour $n = 2$, la propriété sera montrée pour tout $n \geq 2$.

b) (i) Avec $I = [\![1, n]\!]^2$, on a :

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{C}) &= \mathrm{Vect}(E_{i,j}, (ij) \in I\} \\ &= \mathrm{Vect}(E_{i,j}, (i,j) \in \bigcup_{k=1}^{r} I_k\} \\ &= \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Vect}(E_{i,j}, (i,j) \in I_k\} \\ &= \sum_{k=1}^{r} \mathcal{E}_k \end{aligned}$$

Reste à montrer que la somme est directe

(M1) Avec le critère de concaténation des bases : on sait que la somme des $\mathcal{E}_k$ est directe si, et seulement si concaténation des bases $(E_{i,j})_{(i,j)\in I_k}$ des $\mathcal{E}_k$ est libre, or cette concaténation ici donne la famille des $(E_{i,j})_{(i,j)\in I}$ entière sans répétition puisque l'union des J_k est disjointe. Donc cette famille est libre.

(M2) Avec le critère sur la somme des dimensions : il suffit de montrer que $\sum_{k=1}^{r} \dim \mathcal{E}_k = n^2$.

Or comme la famille des $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est libre, pour chaque k, $\dim \mathcal{E}_k = \mathrm{Card}(J_k)$.

Et comme $\coprod_{k=1}^{r} J_k = [\![1, n]\!]^2$, on sait que $\sum_{k=1}^{r} \mathrm{Card}(J_k) = n^2$.

On conclut bien que $\sum_{k=1}^{r} \dim \mathcal{E}_k = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Card}(J_k) = n^2$.

(M3) Avec les sommes de vecteurs donnant le vecteur nul :

Soit $(A_1, \ldots, A_r) \in \mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_r$ tels que $\sum_{k=1}^{r} A_k = 0$.

Pour chaque $k = 1, \ldots, r$ il existe $\alpha_{k,i,j}$ pour $(i,j) \in J_k$ tels que $A_k = \sum_{(i,j)\in J_k} \alpha_{k,i,j} E_{i,j}$.

Alors $\sum_{k=1}^{r} A_k = \sum_{k=1}^{r} \sum_{(i,j)\in J_k} \alpha_{k,i,j} E_{i,j} = 0$.

Mais dans cette somme chaque terme est un vecteur $E_{i,j}$ distincts de la base canonique, donc tous les coefficients $\alpha_{k,i,j}$ sont nuls et donc tous les A_k sont nuls. Ce qui prouve que la somme est directe.

(Non Méthode !) Graou :

$\boxed{\textbf{NON LES INTERSECTIONS DEUX à DEUX de } \mathcal{E}_k \textbf{ NE SUFFISENT PAS !!}}$

c) (i) Soit $E = \mathbb{C}^n$ et $f : E \to E$ l'endomorphisme canoniquement associé à B. En notant $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique. On convient pour tout $i \in Z$ de noter $e_i = e_{i\%n}$ où $i\%n$ désigne le reste de la division euclidienne de i par n. Autrement dit on prolonge la famille (e_i) par n périodicité : $e_0 = e_n$ et $e_{n+1} = e_1$. et aussi $e_{-1} = e_{n-1}$ etc...

Alors par définition de f pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $f(e_j) = e_{j-1}$.

Mais alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, et tout $j \in [\![1, n]\!]$, $f^k(e_j) = e_{j-k}$.

Matriciellement en prolongeant aussi les deux indices par n périodicité, pour tout (i, j), on a $(B^k)_{i,j} = \delta_{i,j-k}$.

Ainsi pour $k \in [\![1,n]\!]$ $B^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & & & 1 \\ 1 & \ddots & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$
où,e 1 de la première ligne se situe colonne $k+1$ et le 1 de la première colonne est à la ligne $1-k \equiv n+1-k\ [n]$.

$\boxed{\text{En pensant géométriquement i.e. à l'endomorphisme, on voit la bijectivité !}}$

Cela évite les erreurs des personnes qui n'ont pas perçu la diagonale du bas et on pensait que la matrice était nilpotente.

Une façon plus agréable d'écrire la matrice : par blocs $\forall\, k \in [\![0,n]\!]$, $B^k = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{pmatrix}$

(ii) Notons $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ avec $d_i \in M_n(\mathbb{C})$.

Alors pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, et tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $DM(i,j) = d_i m_{i,j}$

Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. On sait déjà par le a) que $B^k \in \mathcal{E}_k$.

On veut montrer que si $(DB^k)(i,j) \neq 0$ alors $B^k(i,j) \neq 0$, ce qui montrera bien que $DB^k \in \mathcal{E}_k$.

Mais c'est évident puisque $(DB^k)(i,j) = d_i B^k(i,j)$.

(iii) Comme la famille est formée de n^2 éléments de $M_n(\mathbb{K})$ et qu'on sait que $\dim(M_n(\mathbb{K})) = n^2$, il sufffit de montrer qu'elle est libre.

Soit $(\lambda_{k,\ell})_{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2}$ telle que $\displaystyle\sum_{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2} \lambda_{k,\ell} A^k B^\ell = 0 \quad (*)$

Avec le b), comme la famille des $J_\ell = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \equiv j-\ell\}$ pour $\ell = 0,1,\dots,n-1$ est une partition de $[\![1,n]\!]^2$, on sait que $M_n(\mathbb{K}) = \oplus_{\ell=1}^n \mathcal{E}_\ell$.

Or avec le (ii) pour chaque $\ell = 0,1,\dots,n-1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,l} A^k B^\ell \in \mathcal{E}_\ell$.

Donc par caractérisation de la somme directe, on déduit de $(*)$ que pour tout $\ell = 0,\dots,n-1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,l} A^k B^\ell = 0 \quad (**)$$

Or comme B est inversible (d'inverse B^{n-1}) on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,\ell} A^k = 0$.

Or cette condition s'écrit pour chaque $j = 0,\dots,n-1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,\ell}.\omega^{jk} = 0$.

On peut, pour chaque $\ell \in [\![0,n-1]\!]$ réécrire ces conditions sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{n-1} \\ & & & \\ \omega^{n-1} & (\omega^{n-1})^2 & \dots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{0,\ell} \\ \lambda_{1,\ell} \\ \vdots \\ \lambda_{n-1,\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On reconnaît la matrice de Vandermonde de $(1,\omega,\omega^2,\dots,\omega^{n-1})$ dont le déterminant est non nul puisque ces n nombres complexes sont distincts.

On conclut pour chaque $\ell \in [\![0,n-1]\!]$, et chaque $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\lambda_{k,\ell} = 0$. La famille est bien libre.

Problème

Q 1) (i) Le théorème de Cesàro (au programme, et aussi conséquence immédiate du théorème de sommation des relation de comparaisons) dit que (E,C) vérifie l'axiome de prolongement : en effet si $u \in \mathcal{C}$, on a $U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$ et le théorème de Cesàro dit alors que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Ainsi, on a montré que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$

(ii) Montrons que $\mathcal{C}'$ est un s.e.v. de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$: • on sait déjà que $\mathcal{C}' \supset \mathcal{C}$, donc $\mathcal{C}'$ est non vide,
• si $u, u' \in \mathcal{C}'$, et $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ et $U'_n = \sum_{k=0}^{n-1} u'_k$ tendent respectivement vers ℓ et ℓ' dans $\mathbb{C}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\sum_{k=0}^{n-1} (\lambda u_k + u'_k) = \lambda U_n + U'_n$.
Et $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (\lambda U_k + U'_k) = \lambda \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U'_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell + \ell'$ ce qui montre bien que $\lambda u + u' \in \mathcal{C}'$ ce qui montre bien que $\mathcal{C}'$ est un s.e.v. de $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$
(iii) En outre le passage à la limite dans la dernière égalité du (ii) dit que $C(\lambda u + u') = \lambda C(u) + C(u')$ ce qui montre que l'application C est linéaire.

Q 2) **(M1)** Pour $u_n = (-1)^n$, on a $U_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

Donc en notant $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k$, si $n = 2p$ est pair $M_n = 1/n \times n/2 = 1/2$ et si $n = 2p+1$ est impair, $M_{2p+1} = 1/(2p+1) \times (p+1) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1/2$.
Ceci montre que $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1/2$ et donc que $(u_n) \in \mathcal{C}$ et que $C(u) = 1/2$.
(M2) Avec la formule sur les sommes géométriques :

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=0}^{k-1}(-1)^\ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-(-1)^k}{1+1} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} + \frac{(-1)^{n+1}}{4n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Q 3) On note encore $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k$, on distingue le comportement de M_{3n}, M_{3n+1} et M_{3n+2}.
En effet $U_k = 1$ si $k \equiv 1\ [3]$, $U_k = 0$ si $k \equiv 2$ ou $k \equiv 0\ [3]$.
Donc si $n \equiv 0\ [3]$, $M_n = \frac{1}{n}(U_1 + \cdots + U_n)$ se découpe parfaitement en $n/3$ paquets de trois termes consécutifs qui valent 1 donc $M_n = 1/n.(n/3) = 1/3$.
Si $n \equiv 1\,[3]$, $n = 3p+1$ et $M_{3p+1} = \frac{1}{3p+1}(U_1 + \cdots + U_{3p} + U_{3p+1}) = \frac{1}{3p+1}.(p+1) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1/3$.
De même $M_{3p+2} = \frac{1}{3p+2}.(p+1) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1/3$.
La convergence de ces trois suites extraites vers la même limite montre que $u \in \mathcal{C}$ et que $C(u) = 1/3$.

Q 4) Comme les U_i sont positifs, on sait que

$$\frac{U_1 + \cdots + U_{2n}}{2n} \geq \frac{U_{n+1} + \cdots + U_{2n}}{2n} \quad (1)$$

Comme les u_i sont positifs, la suite (U_i) est croissante donc

$$\frac{U_{n+1} + \cdots + U_{2n}}{2n} \geq \frac{nU_{n+1}}{2n} = \frac{U_{n+1}}{2} \quad (2)$$

Avec (1) et (2) on a $M_{2n} \geq \frac{U_{n+1}}{2}$ et donc par minoration $M_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui prouve que la série n'est pas convergente au sens de Cesàro.
Remarque : si on ne suit pas l'indication proposée par l'énoncé, on peut aussi utiliser le théorème de Cesaro pour les suites qui tendent vers $+\infty$. Comme $U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce théorème dit directement que $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Q 5) a) Soit ℓ la limite de $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ au sens de Cesàro, c'est-à-dire la limite de la suite $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des moyennes de Cesàro. Alors, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de limite nulle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$M_n = \ell + \varepsilon_n \quad (*)$$

Puis, pour $n \in \mathbf{N}^*$, suivant l'indication, on exprime U_n en fonction des moyennes de Cesàro :

$$nM_n = U_1 + \cdots + U_n$$

donc $nM_n - (n-1)M_{n-1} = U_n$ et donc en divisant par n et avec $(*)$:

$$\frac{U_n}{n} = M_n - \frac{n-1}{n}M_{n-1} = (\ell + \varepsilon_n) - \frac{n-1}{n}(\ell + \varepsilon_{n-1})$$

$$\frac{U_n}{n} = \varepsilon_n + \frac{\ell}{n} - \frac{n-1}{n}\varepsilon_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui montre bien que $U_n = o(n)$.

b) (i) D'abord vérifions que $H_n = o(n)$.

(M1) On sait (par exemple par encadrement par des intégrales) que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ donc $H_n = o(n)$ (cet argument reste moins cher que le D.A. $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

(M2) Avec le théorème de Cesàro : comme $1/k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on sait que $1/n \sum_{k=1}^{n} 1/k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) en notant $M_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} H_k$ montrons que $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(M1) cohérente avec la (M1) du (i) Par théorème de sommation des équivalents pour les séries à termes positifs, dans le cas divergent : $\sum_{k=1}^{n} H_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$

D'autre part, par encadrement par des intégrales, $\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$. (refaire ici, cf. cours).

Donc $M_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(M2) plus rapide ici Avec la Q5 on sait qu'une série à termes positifs divergente, ce qui est le cas de la série harmonique, n'est jamais convergente au sens de Cesàro.

c) Pour $u_n = (-1)^{n-1}n$, on a

$$U_{2n} = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{k-1}\ k = (-0+1) + (-2+3) + \cdots + (-(2n-2) + (2n-1)) = n$$

et $U_{2n+1} = U_{2n} + u_{2n} = n - 2n = -n$.

On a $U_{2n}/(2n) = 1/2$ et $U_{2n+1}/(2n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1/2$. En tous cas (U_n/n) ne tend pas vers 0.

Q 6) On considère donc $(u_n) \in \mathcal{C}$ et (v_n) la suite translatée définie par $v_n = u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

En notant $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$, on a pour tout $n \geq 1$, $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} = U_{n+1} - u_0$.

Ainsi la n-ième somme de Cesàro de (V_n) s'écrit

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(U_{k+1} - u_0) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n+1} U_i\right) - u_0$$

après avoir séparé la somme en deux et fait un changement d'indice $i = k+1$.

On en déduit encore que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i\right) + \frac{U_{n+1}}{n} - \frac{U_1}{n} - u_0 \quad (*)$$

Or d'après la question 5) a) si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge au sens de Cesàro, $U_{n+1}/(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc dans $(*)$, tous les termes du membre de droite sont convergents.
Cela montre bien qu'alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge au sens de Cesàro et que $C(v) = C(u) - u_0$, ce qui achève la vérification demandée.

Q 7) a)

$$\frac{U_1 + \cdots + U_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} u_k}{n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n} u_k}{n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)u_k}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}(1-\frac{k}{n})u_k = \sum_{k=0}^{n}(1-\frac{k}{n})u_k$$

car le terme d'indice $k = n$ est toujours nul. L'égalité ci-dessus donne l'équivalence entre les deux convergences demandées et l'égalité des limites dans le cas convergent.
b) Avec l'égalité du a), et en séparant la somme du membre de droite en deux, on a :

$$\frac{U_1 + \cdots + U_n}{n} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} u_k \quad (\dagger)$$

Alors si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente au sens usuel, le membre de gauche de $(\dagger)$ est convergent par théorème de Cesàro, et le premier terme du membre de droite aussi, donc par théorème d'opération, $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} u_k$ converge, ce qui est la conclusion voulue.
c) (i) On reprend l'égalité $(\dagger)$ du b) et encore une fois sur les trois termes qui apparaissent dans la formule, deux convergent, donc le troisième aussi.
(ii) Avec $u_n = o(1/n)$, $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par théorème de Cesàro $\frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et on est donc ramené aux hypothèses du (i) et la conclusion du (i) s'applique donc ici aussi.

Q 8) Notons pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(U) = \frac{1}{2^N}\sum_{n=1}^{N}\binom{N}{n}U_n$.
Alors l'application $S : U \mapsto (S_N(U))_{N\in\mathbb{N}}$ est linéaire et pour une suite W telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \ell$, on a $S_N(W) = \frac{\ell}{2^N}\sum_{n=1}^{N}\binom{N}{n} = \frac{\ell.(2^N-1)}{2^N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Pour une suite (U_n) quelconque qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n := U_n - \ell$, on a pour tout N, $S_N(V) = S_N(U) - S_N(W)$ et comme $S_N(W) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \ell$, il est équivalent de montrer que $S_N(U) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou que $S_N(V) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
On considère donc désormais la suite (V_n) qui tend vers 0.
Soient $\varepsilon > 0$ et M un majorant de $(|V_n|)_{n\in\mathbf{N}'}$. Il existe un entier $N_1 \in \mathbf{N}^*$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N_1$, on ait $|V_n| \leqslant \varepsilon$, d'où pour $N \geqslant N_1$ l'encadrement :

$$\begin{aligned}|S_N(V)| := \left|\frac{1}{2^N}\sum_{n=1}^{N}\binom{N}{n}V_n\right| &\leqslant \frac{1}{2^N}\sum_{n=0}^{N_1-1}\binom{N}{n}|V_n| + \frac{1}{2^N}\sum_{n=N_1}^{N}\binom{N}{n}|V_n| \\ &\leqslant \underbrace{M \times \frac{1}{2^N}\sum_{n=1}^{N_1-1}\binom{N}{n}}_{:=P_1(N)} + \underbrace{\varepsilon \times \frac{1}{2^N}\sum_{n=N_1}^{N}\binom{N}{n}}_{=:P_2(N)}\end{aligned}$$

La deuxième somme $P_2(N)$ est majorée par ε puisque les coefficients sont positifs (on peut ainsi majorer et compléter le binôme). En revanche, la première somme $P_1(N)$ pose un problème de croissances comparées. On le résout en remarquant que l'entier N_1 étant fixé, le numérateur de $P_1(N)$ est un polynôme de degré au plus N_1 en N : il est donc négligeable à l'infini devant 2^N. Il existe donc un entier $N_2 > N_1$ tel que pour tout entier $N \geqslant N_2$ on ait $P_1(N) \leqslant \varepsilon$, et la conclusion suit puisque l'on a alors

$$\forall N \in \mathbf{N}, \quad N \geqslant N_2 \Rightarrow |S_N(V)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Q 9) a) Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour $T \in \mathscr{L}(E)$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on a, par télescopage, la formule des sommes géométriques :

$$(\mathrm{id} - T) \circ (\sum_{n=0}^{N-1} T^n) = \mathrm{id} - T^N$$

En appliquant cette formule à $T = \dfrac{\mathrm{id} + \tau}{2}$, alors $\mathrm{id} - T = \dfrac{\mathrm{id} - \tau}{2}$ et en échangeant les signes, la formule devient :

$$\frac{\tau - \mathrm{id}}{2} \circ \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\mathrm{id} + \tau)^n}{2^n} = \frac{1}{2^N} \left((\mathrm{id} + \tau)^N - 2^N \,\mathrm{id} \right) \quad (*)$$

Or par la formule du binôme dans $\mathscr{L}(E)$ avec id et τ qui commutent, on sait que :

$$(\mathrm{id} + \tau)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \tau^n$$

En écrivant $2^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n}$ on peut alors écrire :

$$\left((\mathrm{id} + \tau)^N - 2^N \,\mathrm{id} \right) = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} (\tau^n - \mathrm{id}) = \sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} (\tau^n - \mathrm{id})$$

puisque $\tau^0 = \mathrm{id}$.
Ainsi $(*)$ devient :

$$\frac{\tau - \mathrm{id}}{2} \circ \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\mathrm{id} + \tau)^n}{2^n} = \frac{1}{2^N} \sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} (\tau^n - \mathrm{id})$$

et en réappliquant la formule sur les sommes géométriques : $(\tau^n - \mathrm{id}) = (\tau - \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} + \tau + \cdots + \tau^{n-1})$ on obtient :

$$\frac{\tau - \mathrm{id}}{2} \circ \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\mathrm{id} + \tau)^n}{2^n} = (\tau - \mathrm{id}) \circ \frac{1}{2^N} \sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} \left(\mathrm{id} + \tau + \cdots + \tau^{n-1} \right)$$

b) (i) Par définition, pour $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v = (\tau - \mathrm{id})(u)$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.
Soit $v \in \mathbb{C}^N$ quelconque, on cherche à définir $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.
On choisit $u_0 = 0$, *alors on veut* $v_0 = u_1 - u_0$ *donc* $u_1 = v_0$, *puis* $v_1 = u_2 - u_1$ *donc* $u_2 = v_1 + u_1 = v_1 + v_0$.
En fait en posant $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = v_n$.
(ii) Le fait que $\Delta := \tau - \mathrm{id}$ (notation de la suite du sujet) soit *surjective* va permettre « simplifier » par $\tau - \mathrm{id}$ dans la formule du a).
En effet d'une manière générale :
Lemme : si f, g, h sont trois applications d'un ensemble E dans lui-même telles que $g \circ f = h \circ f$ et que f est surjective alors $g = h$.
Application du lemme :
avec $f = \tau - \mathrm{id}$ la formule du a) ne semble pas être « dans le bon sens », car elle s'écrit plutôt $f \circ g = f \circ h$! Mais ici toutes ces applications linéaires commutent (ce sont des polynômes en τ) donc la formule du a) s'écrit aussi :

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\mathrm{id} + \tau)^n}{2^n} \right) \circ (\tau - \mathrm{id}) = \frac{1}{2^{N-1}} \left(\sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} \left(\mathrm{id} + \tau + \cdots + \tau^{n-1} \right) \right) \circ (\tau - \mathrm{id})$$

et là on peut bien simplifier à droite par $\tau - \mathrm{id}$ pour obtenir la formule demandée.

Démonstration du lemme : Soit $x \in E$. On veut montrer que $g(x) = h(x)$.
Or comme f est surjective, on a un $y \in E$ tel que $x = f(y)$ et on sait que $g(f(y)) = h(f(y))$. Donc $g(x) = h(x)$. $\square$

c) Par la formule du binôme dans l'algèbre $\mathscr{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ avec id et τ qui commutent, on sait que :

$$(\mathrm{id} + \tau)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tau^k$$

En appliquant cette formule à une suite $u = (u_n)$ et en considérant l'égalité des termes d'indice 0, on obtient :

$$((\mathrm{id} + \tau)^n u)_0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k,$$

puisque $(\tau^k u)_0 = u_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\widetilde{u}_n = \frac{1}{2^{n+1}} ((\mathrm{id} + \tau)^n u)_0$$

Donc en ajoutant ces égalités :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \widetilde{u}_n = \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\mathrm{id} + \tau)^n}{2^{n+1}} u \right)_0$$

D'après la formule du b) (multipliée par $\frac{1}{2}$), on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} \widetilde{u}_n &= \frac{1}{2^N} \left(\sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} (\mathrm{id} + \tau + \cdots + \tau^{n-1}) u \right)_0, \\
&= \frac{1}{2^N} \sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} \big((\mathrm{id} + \tau + \cdots + \tau^{n-1}) u \big)_0, \\
&= \frac{1}{2^N} \sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} U_n
\end{aligned}$$

d) L'égalité du c) montre que la convergence au sens d'Euler de la série $(\sum_{n \geq 0} u_n)$ est bien équivalente à la convergence au sens usuel de $(\sum_{n \geqslant 0} \widetilde{u}_n)$.
Elle montre aussi, en cas de convergence au sens d'Euler, que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{u}_n = E_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Dans le cas où en outre la série $(\sum_{n \geqslant 0} u_n)$ converge au sens usuel, on sait alors par l'axiome de prolongement vérifié par E (cf. Q8) que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{u}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

ce qui, par la définition de $\widetilde{u}$ donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Q 10) (a) (i) On sait (série géométrique de raison $(-z)$) que $\sum (-z)^n$ est convergente au sens usuel si, et seulement si, $|z| < 1$.
Et dans ce cas, sa somme vaut $\dfrac{1}{1+z}$.

(ii) En revanche pour la convergence au sens d'Euler, on considère la série $(\sum_{n\geq 0} E_n)$ où :

$$E_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-z)^k = \frac{(1-z)^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n$$

On a encore une série géométrique : donc on sait que $\sum_{n\geqslant 0} E_n$ converge au sens usuel si, et seulement si, $\left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$ donc ssi $z \in D_o(1,2)$ (disque ouvert de centre 1 et de rayon 2).
(Remarquons que $D_o(1,2)$ contient bien $D_o(0,1)$ qui lui est tangent intérieurement en 0 : c'est nécessaire puisque la convergence usuelle entraîne la convergence au sens d'Euler).
Pour $z \in D(1,2)$, $E(u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1-z}{2}} = \frac{1}{1+z}$ (ce qui donne la même formule qu'au (i)).
b) Par ce qui précède, la question équivaut à montrer que $(\sum_{n\geqslant 0} \widetilde{u}_n)$ est divergente au sens usuel, où ici :

$$\widetilde{u}_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$$

On utilise alors la formule dite « du capitaine » (qui n'est rien d'autre que la relation de récurrence ici explicite entre les deux binomiaux) : $\binom{n}{k}\frac{1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}\frac{1}{n+1}$.
Alors :

$$\widetilde{u}_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} = \frac{2^{n+1}-1}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

Comme $(\frac{1}{(n+1)2^{n+1}})$ est terme général de série convergente alors que $(1/(n+1))$ est terme général de série divergente, on conclut que par somme, $(\widetilde{u}_n)$ est aussi terme général de série divergente.
Ainsi la série harmonique diverge au sens d'Euler.

Q 11) Avec les notations de la définition 2, on suppose que $(\sum_{n\geqslant 0} u_n)$ est *Euler-convergente* et on veut montrer que$(\sum_{n\geqslant 0} v_n)$ est aussi Euler convergente, de même somme au sens d'Euler, où $v_n = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Or $V_n = u_1 + \cdots + u_n = u_n + U_n - u_0$.
Donc en sommant ces égalités, et compte-tenu toujours du fait que $\sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} = 2^N - 1$, on a :

$$S_N(V) = \frac{1}{2^N} \sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} V_n = \underbrace{\frac{1}{2^N} \sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} u_n}_{:=w_N} + S_N(U) - \frac{1}{2^N}(2^N - 1)u_0 \quad (*)$$

Or dans le second membre de $(*)$, on remarque que $w_N = \frac{1}{2^N} \sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} u_n = 2(\widetilde{u}_N - \frac{u_0}{2^{N+1}})$
Et par le théorème de E-convergence de la Q9 d), on sait que l'hypothèse d'Euler convergence de $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ entraîne que $\tilde{u}_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi ici $w_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui avec $(*)$ prouve la convergence de $S_N(V)$ et par passage à la limite on a bien l'égalité $E(v) = E(u) - u_0$.
La sommation d'Euler est donc bien stable par translation.

Q 12) Comme $\Delta^n = (\tau - \mathrm{id})^n$ et que τ et id commutent, d'après la formule du binôme dans l'anneau $(\mathscr{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), +, \circ)$ on a :

$$\Delta^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \tau^k$$

En appliquant cette formule à une suite w et en évaluant en 0, on a bien

$$(\Delta^n w)_0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (\tau^k w)_0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} w_k.$$

Q 13) Par théorème du produit de Cauchy, pour les séries absolument convergentes, on sait donc que :

$$\begin{aligned} e^{-x}.\left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \frac{x^n}{n!}\right) &= \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m x^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \frac{x^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \quad (*) \end{aligned}$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} x^{n-k}}{(n-k)!} . w_k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{x^n}{n!} w_k$

Et d'après la question précédente, on a bien $c_n = (\Delta^n w)_0 \dfrac{x^n}{n!}$ ce qui dans $(*)$ donne la conclusion.

Q 14) Il suffit d'appliquer le théorème de E-convergence de la Q 9) avec la formule de la question précédente.

En effet le théorème de E-convergence dit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n w_n$ est convergente au sens d'Euler si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k w_k$ converge au sens usuel donc ssi $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} w_k$ converge au sens usuel donc ssi par la Q12, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (\Delta^n w)_0$ converge au sens usuel ce qui est exactement la question posée, l'égalité des sommes étant alors donnée par la seconde partie du même théorème.

Q 15) a) Notons $R_N = \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$

En groupant les termes par paquets de deux, ce qui est possible dans une série à signe variable dont le terme général tend vers zéro, on peut écrire :

$$R_N = (-1)^N [(\frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+3}) + (\frac{1}{2N+5} - \frac{1}{2N+7} + \cdots]$$

où toutes les parenthèses contiennent un nombre positif.

Donc $|R_N| = [(\dfrac{1}{2N+1} - \dfrac{1}{2N+3}) + (\dfrac{1}{2N+5} - \dfrac{1}{2N+7} + \cdots] \geq \dfrac{1}{2N+1} - \dfrac{1}{2N+3}$

Enfin en posant $f(x) = 1/(2x+1)$ par T.A.F. $f(N) - f(N+1) = -f'(c)$ avec $c \in]N, N+1[$

Donc $\dfrac{1}{2N+1} - \dfrac{1}{2N+3} = \dfrac{2}{(2c+1)^2} \geq \dfrac{2}{(2N+1)^2}$.

D'où la conclusion $|R_N| \geq \dfrac{a}{(N+b)^2}$.

N.B. A la place du groupement des termes par deux, qu'on a ici utilisé très grossièrement en ne gardant que le premier paquet, on peut aussi utiliser l'écriture intégrale de R_N avec la même méthode qu'au b) ci-dessous au départ.

b) Posons

$$w_n = \frac{1}{2n+1} = \int_0^1 t^{2n}\, dt \quad (*)$$

On sait par Q12 que :

$$(\Delta^n w)_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} w_k.$$

Donc avec $(*)$:

$$(\Delta^n w)_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \int_0^1 t^{2k}\, dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} t^{2k}\, dt.$$

Par la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} t^{2k} = (t^2 - 1)^n.$$

et donc :

$$(\Delta^n w)_0 = \int_0^1 (t^2 - 1)^n\, dt =: I_n,$$

c) Comme rappelé en préambule à cette Q15, grâce à la Q14, on sait qu'en cas de convergence du membre de gauche, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (\Delta^n w)_0$$

Donc ici avec la convergence vers $\pi/4$ et l'égalité du b),

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} I_n$$

comme demandé.
Notons maintenant :

$$R_N := \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^n I_n}{2^{n+1}}.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(-1)^n I_n = (-1)^n \int_0^1 (t^2 - 1)^n\, dt = \int_0^1 (1 - t^2)^n\, dt \geq 0.$$

on en déduit que : $R_N \geq 0$.
Par ailleurs $(1 - t^2)^n \leq 1$ sur $[0, 1]$, donc $(-1)^n I_n \leq 1$. D'où

$$0 \leq R_N \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^N}.$$

Cela prouve les inégalités demandées :

$$0 \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^n I_n}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^N}, \qquad \forall N \geq 1.$$