$\boxed{\text{DM 4 : solution}}$

Problème 1 : hyperplans de $M_n(K)$ stables par multiplication

1) a) Soit $M, N \in M_n(K)$ et $\lambda \in K$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda M + N) &= \mathrm{Tr}(A(\lambda M + N)) = \mathrm{Tr}(\lambda AM + AN), \quad \text{par linéarité à droite du produit matriciel}\\ &= \lambda\,\mathrm{Tr}(AM) + \mathrm{Tr}(AN) \quad \text{par linéarité de la trace}\\ &= \lambda\varphi_A(M) + \varphi_A(N)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{D'où la linéarité de } \varphi_A}$.

b) **(M1)** Méthode un peu conceptuelle beaucoup choisie dans la classe (cours de sup ? , très jolie en effet)

Soit $\varphi : M_n(K) \to \mathscr{L}(M_n(K), K)$, $A \mapsto \varphi_A$.

• Montrons que φ est une application linéaire : pour cela on montre que si $\lambda \in K$, $A, B \in M_n(K)$, $\varphi_{\lambda A+B} = \lambda\varphi_A + \varphi_B \quad (*)$ (égalité dans $\mathscr{L}(M_n(K), K)$).

Pour vérifier cette égalité $(*)$, il faut et il suffit de montrer que pour tout $M \in M_n(\mathbb{K})$, $\varphi_{\lambda A+B}(M) = \lambda\varphi_A(M) + \varphi_B(M) \quad (**)$

Or $(**)$ se prouve encore comme au (i) par linéarité à gauche du produit et linéarité de la trace.

• Montrons que φ est *injective*. Comme φ est linéaire il suffit de considérer son noyau

Or si $A \in \ker(\varphi)$, alors pour tout $M \in M_n(K)$, $\mathrm{Tr}(AM) = 0$.

En particulier pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = 0$.

Or par calcul de produit matriciel, $\mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$ donc pour tout (i, j) $a_{i,j} = 0$ et $\ker(\varphi) = \{0\}$.

• Comme dim $\mathscr{L}(M_n(K), K) = \dim(M_n(K))$ l'espace de départ et d'arrivée de φ ont même dimension et donc comme φ est linéaire injective elle est automatiquement bijective.

Ceci montre bien que pour tout $\psi \in \mathscr{L}(M_n(K), K)$, il existe un unique $A \in M_n(K)$ telle que $\psi = \varphi_A$.

(M2) plus concrète en coordonnées : il est bon de savoir que $\boldsymbol{\mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}}$.

Soit $\psi \in \mathscr{L}(M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$.

Analyse : s'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\psi = \varphi_A$ alors en particulier pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\varphi_A(E_{i,j}) = \psi(E_{i,j}).$$

Or $\varphi_A(E_{i,j}) = \mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$.

Ceci dit qu'il y a donc une unique matrice A qui peut convenir, la matrice $A = (a_{i,j})$ où pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$a_{i,j} = \psi(E_{j,i}) \quad (*)$$

Synthèse soit A la matrice définie par $(*)$. Alors les deux formes linéaires φ_A et ψ coïncident sur la base des $(E_{i,j})$ donc sont égales partout.

2) D'après le cours, comme $\mathscr{H}$ est un hyperplan, il existe une forme linéaire non nulle ψ telle que $\mathscr{H} = \ker(\psi)$. On applique alors le 1) b), on a une matrice A telle que $\psi = \varphi_A$ et donc $\boxed{\mathscr{H} = \ker(\varphi_A)}$.

3) a) Soit $N \in \mathscr{H}$, on veut montrer que $\varphi_{AM}(N) = 0$. Or par définition :

$$\varphi_{AM}(N) = \mathrm{Tr}((AM)N) = \mathrm{Tr}(A(MN)) \quad (1)$$

Comme $M, N \in \mathscr{H}$ et $\mathscr{H}$ est stable par multiplicaion, on a $MN \in \mathscr{H}$ et donc $\varphi_A(MN) = 0$ ce qui dans (1) donnne

$$\varphi_{AM}(N) = 0$$

ce qui montre bien que $N \in \ker(\varphi_{AM})$.

Ainsi $\boxed{\mathscr{H} \subset \ker(\varphi_{AM})}$

b) D'après le cours, l'inclusion $\ker(\varphi_A) \subset \ker(\varphi_{AM})$ pour les noyaux de formes linéaires dit qu'il existe un $\lambda \in K$ tel que $\varphi_{AM} = \lambda\varphi_A$.

N.B.1 Peut-être le résultat a-t-il été énoncé différemment dans votre cours avec comme hypothèse l'égalité des noyaux avec la chanson « deux formes linéaires qui ont le même noyau sont proportionnelles ».

Mais si l'inclusion est stricte cela signifie que $\ker(\varphi_{AM}) = M_n(\mathbb{K})$ entier et donc que φ_{AM} est l'application nulle et dans ce cas $\lambda = 0$ convient.

N.B. 2 Ce résultat de cours est un cas particulier très simple du lemme de factorisation du DM3.

4) a) (i) soit $N \in \mathscr{N}$; on a $AN = 0$ donc par linéarité de la trace $\mathrm{Tr}(AN) = 0$ donc $N \in \mathscr{H}$. D'où l'inclusion $\boxed{\mathscr{N} \subset \mathscr{H}}$

(ii) L'application $N \in M_n(K) \mapsto AN \in M_n(K)$ est linéaire par linéarité à droite du produit matriciel et $\mathscr{N}$ est le noyau de cette application donc $\boxed{\mathscr{N} \text{ est un s.e.v de } M_n(\mathbb{K})}$

b) **(M1) avec l'écriture $A = PJ_rQ$ typique des questions sur le rang**

Comme $\mathrm{rg}(A) = r$, il existe deux matrices inversibles P, Q telles que $A = PJ_rQ$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ par bloc.

Pour toute matrice $M \in M_n(K)$ comme Q est inversible, on peut l'écrire $M = Q^{-1}\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$ avec des blocs de même taille que J_r.

Alors comme P est inversible, $AM = 0 \Leftrightarrow J_r\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} = 0$

Or $J_r\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $M \in \mathscr{N}$ si et seulement si $M_1 = M_2 = 0$, si et seulement si, $M = Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$ avec M_3, M_4 quelconques. Comme le bloc (M_3, M_4) est de taille $(n-r)\times n$ la dimension de de l'e.v. formée par les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$ est bien $(n-r).n$ et, la matrice inversible Q étant fixée, l'application $N \mapsto Q^{-1}N$ étant un isomorphisme d'espaces vectoriels, on conclut que $\boxed{\dim(\mathscr{N}) = (n-r)n}$

(M2) En fait on a besoin de « moins » ici que toute la réduction PJ_rQ

On peut en effet se contenter de décomposer en colonnes : si $M = (C_1, \dots, C_n)$ où $C_j \in M_{n,1}(K)$ est la j-ième colonne de M alors

$$AM = 0 \Leftrightarrow A(C_1, \dots, C_n) = 0 \Leftrightarrow (AC_1, \dots, AC_n) = 0 \Leftrightarrow \forall\, j \in [\![1, n]\!], C_j \in \ker(A)$$

Autrement dit $\mathscr{N} \simeq (\ker(A))^n$ (où le $\simeq$ désigne ici un isomorphisme d'espaces vectoriels).

Comme $\dim(\ker(A) = n-r$ par théorème du rang, on a conclut bien (dim. d'un e.v. produit= la somme des dimensions) :

$\boxed{\dim(\mathscr{N}) = (n-r)n}$

5) Comme on a vu que $\mathscr{N} \subset \mathscr{H}$ on voit par définition $\mathscr{N} = \ker(f)$.

Par le théorème du rang $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathscr{H} - \dim(\ker(f))$ donc ici $\mathrm{rg}(f) = (n^2-1) - (n-r)n$.

Donc $\mathrm{rg}(f) = nr - 1$.

Mais d'autre part, d'après la Q3, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(A)$ donc $\mathrm{rg}(f) \leq 1$.

Au total on a donc $nr - 1 \leq 1$ c'est-à-dire $nr \leq 2$.

Or d'après la première ligne de l'énoncé $n \geq 2$ donc $\boxed{n = 2 \text{ et } r = 1}$.

6) Avec $n = 2$ et $r = 1$, on a $\dim(\mathscr{H}) = n^2 - 1 = 3$ et $\dim(\mathscr{N}) = (n-r)n = 2$ donc $\dim(\mathscr{N}) < \dim(\mathscr{H})$.

On peut donc bien prendre un $M \in \mathscr{H} \setminus \mathscr{N}$.
Alors par définition de $\mathscr{H}$, on a $\mathrm{Tr}(AM) = 0 \quad (1)$.
Par 3) b), on sait aussi qu'il existe un $\lambda \in K$ tel que $AM = \lambda A \quad (2)$ et comme $M \notin \mathscr{N}$, $\lambda \neq 0$.
Avec (1) et (2) on a $\lambda \mathrm{Tr}(A) = 0$ avec $\lambda \neq 0$ donc $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = 0}$.

7) a)(i) Montrons que $\mathscr{N} \cap KI_2 = \{0\}$
Si $M \in \mathscr{N} \cap KI_2$ alors $M = \lambda I$ et $AM = 0$ donc $A(\lambda I) = 0$ donc $\lambda A = 0$ et comme $A \neq 0$, on conclut que $\lambda = 0$ et $M = 0$.
Ainsi $\boxed{\mathscr{N} \cap KI_2 = \{0\}}$ donc $\mathscr{N} + KI_2 = \mathscr{N} \oplus KI_2$.
(ii) On a déjà vu que $\mathscr{N} \subset \mathscr{H}$ à la Q4a) et d'autre part $K.I \in \mathscr{H}$ car $\mathrm{Tr}(A) = 0$ donc $\mathrm{Tr}(A\lambda I) = 0$ pour tout $\lambda \in K$.
Comme $\mathscr{H}$ est un s.e.v. on en déduit par stabilité par + que $\mathscr{N} \oplus KI_2 \subset \mathscr{H}$
(iii) Enfin on sait que $\dim(\mathscr{N} \oplus KI_2) = \dim(\mathscr{N}) + \dim(K.I_2) = 2 + 1$ et que $\dim(\mathscr{H}) = 3$.
Par (ii) et (iii), on a (inclusion + égalité des dim.) l'égalité demandée : $\boxed{\mathscr{N} + KI_2 = \mathscr{H}}$
b) Soit $M_1, M_2 \in \mathscr{H}$ qu'on écrit $M_1 = N_1 + \lambda_1 I$ et $M_2 = N_2 + \lambda_2 I$.
Alors $M_1 M_2 = N_1.N_2 + \lambda_1 N_2 + \lambda_2 N_1 + \lambda_1\lambda_2 I \quad (*)$
Or pour N_1 et N_2 dans $\mathscr{N}$, on a $A(N_1 N_2) = (AN_1).N_2 = 0.N_2 = 0$ donc $N_1 N_2 \in \mathscr{N}$ (en fait $\mathscr{N}$ est un idéal à droite cf. DM 3).
Donc par stabilité de $\mathscr{N}$ par somme : $N_1.N_2 + \lambda_1 N_2 + \lambda_2 N_1 \in \mathscr{N}$ et avec $(*)$ on conclut bien que : $M_1 M_2 \in \mathscr{N} \oplus KI_2 = \mathscr{H}$.
Donc $\mathscr{H}$ est bien stable par produit.

Problème II ; théorème de Lie sur les algèbres de Lie nilpotentes

II.1) Généralités sur les endomorphismes nilpotents :

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. n et $u \in \mathscr{L}(E)$

8) *Démonstration* géométrique *du fait qu'une matrice T.S.S. est nilpotente*
   a) **Terminologie :** La famille (V_k) s'appelle le *drapeau* associé à la base de l'énoncé. Par commodité, on convient de noter $\forall\, k < 0$, $V_k = \{0\}$. L'intérêt de cette notation est qu'avec l'hypothèse $u(V_k) \subset V_{k-1}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on déduit immédiatement par récurrence que $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, $u^n(V_k) \subset V_{k-n} = \{0\}$.
   En particulier $u^n(V_n) \subset V_0 = \{0\}$ donc $u^n = 0$.
   b) Si $A \in TSS_n(\mathbb{K})$ et si $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ est l'endomorphisme canoniquement associé.
   Alors on constate immédiatement que u vérifie la propriété du (a) et donc u est nilpotent et donc A est nilpotente.
   Mieux, en fait $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est T.S.S. si, et seulement si, u vérifie la propriété du a).

9) *Une démonstration du fait qu'un endomorphisme nilpotent peut être représenté par une matrice T.S.S. (comparer au cours du R3)*
   a) On suppose que u est nilpotent d'indice d. Montrons que :
$$\{0\} \subsetneq \ker u \subsetneq \ker u^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker u^{d-1} \subsetneq \ker u^d = E.$$
   • On montre d'abord que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$:
   soit $x \in \ker(u^k)$. Alors $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0) = 0$ donc $x \in \ker u^{k+1}$.
   • Ensuite on montre que si pour un $r \in \mathbb{N}$ on a $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$ alors pour tout $k \geq r$, on a $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$
   Par récurrence immédiate, il suffit de montrer qu'ici $\ker u^{r+1} = \ker u^{r+2}$. Par le point précédent, il suffit de montrer que $\ker u^{r+2} \subset \ker u^{r+1}$.
   Soit $x \in \ker u^{r+2}$. Alors, $u^{r+2}(x) = 0$ donc $u^{r+1}(u(x)) = 0$ donc $u(x) \in \ker u^{r+1}$ mais comme $\ker u^{r+1} = \ker u^r$ on obtient que $u(x) \in \ker u^r$ et donc que $u^{r+1}(x)$ et on a bien montré que $x \in \ker u^{r+1}$.

• Ici pour u nilpotent d'indice d, on a $\ker(u^d) = E$ mais $\ker(u^{d-1}) \neq E$ car $u^{d-1} \neq 0$. Ceci suffit pour être sûr que toutes les inclusions précédentes sont strictes.

b) Soit $(e_1, \dots, e_{k_1})$ une base de $\ker(u)$ qu'on complète en une base $(e_1, \dots, e_{k_1}, e_{k_1+1}, \dots, e_{k_2})$ base de $\ker(u^2)$. On itère cette construction pour définir une suite

$$1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_d = n$$

telle que :

$$\forall\, i \in [\![1, d]\!], (e_1, \dots, e_{k_i}) \text{ est une base de } \ker u^i.$$

Comme $\ker(u^d) = E$, la famille $(e_1, \dots, e_{k_d})$ est une base de E.
On pose encore $k_0 = 0$.
Soit alors $k \in [\![1, n]\!]$ et soit i l'unique entier dans $[\![1, d]\!]$ tel que $k_{i-1} < k \leq k_i$.
Alors $V_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k_i}) = \ker u^i$.
Donc $u(V_k) \subset u(\ker u^i) \subset \ker u^{i-1} = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k_{i-1}}) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1}) = V_{k-1}$.
On a donc bien montré que pour tout k, $u(V_k) \subset V_{k-1}$ et donc par l'équivalence mentionnée dans la solution du 8) b) la matrice de u dans cette base T.S.S □
N.B. Cette idée de prendre une base adaptée à la suite des noyaux permet d'aller plus loin dans la réduction des nilpotents et de comprendre leur classe de similitudes (réduction de Jordan)..

10) *Par l'absurde* si l'on a une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices de u et de v soient simultanément T.S.S. Alors $u + v$ est représenté par une matrice T.S.S. dans $\mathcal{B}$. Donc $(u + v)$ est nilpotent.

Or dans la base $\mathcal{B}_0$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u+v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice inversible (de rang 2 de manière évidente) donc $u + v$ n'est *pas* nilpotent. *Contradiction.*

11) Par propriété du produit par bloc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} A^k & B_k \\ 0 & D^k \end{pmatrix}$ (preuve par récurrence, la matrice B_k étant non précisée).
• Si M est nilpotente, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $M^k = 0$ donc vu $(*)$, en particulier $A^k = 0$ et $D^k = 0$ donc A et D sont nilpotente.
• Réciproquement si A et D sont nilpotentes et si on prend k le maximum des deux indices de nilpotence de A et D, avec $(*)$ on a : $M^k = \begin{pmatrix} 0 & B_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Mais alors M^k est une matrice T.S.S. Donc on sait que M^k est nilpotente et donc M elle-même est nilpotente.

12) On cherche un contre-exemple avec une matrice 2×2 : du coup, pour u canoniquement associé on doit avoir $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$. Donc on fixe un vecteur de $\mathrm{Im}(u)$ par exemple le vecteur $(1, 1)$. Donc on va prendre $u(e_1) = e_1 + e_2$ et on veut ensuite que ce vecteur soit dans $\ker(u)$ donc que $u(e_1 + e_2) = 0$ donc $u(e_1) = -u(e_2)$ donc $u(e_2) = -e_1 - e_2$.
Ainsi $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ convient.

2) Théorème sur les « algèbres de Lie nilpotentes »

13) a) Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$.
Alors, par déf., $ad(u)(\lambda f + \mu g) = u \circ (\lambda f + \mu g) - (\lambda f + \mu g) \circ u$.
Par linéarité à gauche et à droite de $\circ$, on en déduit que : $ad(u)(\lambda f + \mu g) = \lambda u \circ f + \mu u \circ g - \lambda f \circ u - \mu g \circ u$.
En regroupant les termes autrement, on obtient que $ad(u)(\lambda f + \mu g) = \lambda[u, f] + \mu[u, g] = \lambda ad(u)(f) + \mu ad(u)(g)$.
On a bien montré que $ad(u) \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$.

b) On suppose maintenant que u est nilpotent. On veut montrer que $ad(u)$ est nilpotent.
(M1) On montre par récurrence que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, prédicat $P(r)$ suivant est vrai :

$$P(r)\ :\ \forall f \in \mathscr{L}(E),\ (ad(u))^r(f) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} u^k \circ v \circ u^{r-k}.$$

Initialisation : $P(1)$ s'écrit $\forall f \in \mathscr{L}(E)$, $ad(u)(f) = \binom{1}{0}(-1)u^0 \circ v \circ u^1 + \binom{1}{1}(-1)^0 u^1 \circ v \circ u^0$. Ce qui est vrai car le second membre est bien $-v \circ u + u \circ v$.
H.R. On suppose $P(r)$ vrai pour un $r \geq 1$. Montrons que $P(r+1)$ est vraie :
or $\Phi^{r+1}(f) = ad(u)(ad(u)^r(f))$. Par linéarité de $ad(u)$, et par H.R., on a donc :

$$ad(u)^{r+1}(f) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} ad(u)(u^k \circ v \circ u^{r-k}).$$

Mais $ad(u)(u^k \circ v \circ u^{r-k}) = u^{k+1} \circ v \circ u^{r-k} - u^k \circ v \circ u^{r+1-k}$. Donc :

$$\begin{aligned} ad(u)^{r+1}(f) &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \left(u^{k+1} \circ v \circ u^{r-k} - u^k \circ v \circ u^{r+1-k} \right), \\ &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} u^{k+1} \circ v \circ u^{r-k} - \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} u^k \circ v \circ u^{r+1-k}. \\ &= \sum_{i=1}^{r+1} \binom{r}{i-1} (-1)^{r+1-i} u^i \circ v \circ u^{r+1-i} + \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r+1-k} u^k \circ v \circ u^{r+1-k}. \end{aligned}$$

en posant $i = k+1$ dans la première somme.
En regroupant les deux sommes en ayant isolé un terme dans chaque, on obtient :

$$ad(u)^{r+1}(f) = \sum_{k=1}^{r} \left(\binom{r}{k-1} + \binom{r}{k} \right) u^k \circ v \circ u^{r+1-k} + u^{r+1} \circ v + (-1)^{r+1} v \circ u^{r+1}$$

Par la formule du triangle de Pascal pour les binomiaux et en réincorporant les deux termes extrêmes dans la somme, on obtient $P(r+1)$.
La récurrence est établie.
(M2) *Elle se fonde sur la remarque que la preuve précédente est très semblable à celle de la formule du binôme. Ne peut-on pas plutôt déduire ce résultat de la formule du binôme plutôt que refaire la preuve ? La réponse est bien sûr OUI.*
L'idée $ad(u) = L_u - R_u$ où $L_u\ :\ f \mapsto u \circ f$ et $R_u\ :\ f \mapsto f \circ u$.
On remarque que L_u et R_u sont deux éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$ qui commutent entre eux.
Donc la formule du binôme s'applique et donne que $ad(u)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} L_u^k \circ R_u^{r-k}$.
On retrouve exactement la formule donnée dans les prédicats $P(r)$.

Application à la nilpotence de $ad(u)$: si $u^n = 0$ alors

$$ad(u)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k} u^k \circ v \circ u^{2n-k}$$

et dans cette somme tous les termes sont nuls, car les pour $k \geq n$ $u^k = 0$ et pour $k < n$, $u^{2n-k} = 0$.
Donc $ad(u)^{2n} = 0$.

c) Montrons que pour tout $(u,v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\Phi_{[u,v]} = [ad(u), \Phi_v]$.
Il s'agit de montrer que pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, $[[u,v],f] = ad(u) \circ \Phi_v(f) - \Phi_v \circ ad(u)(f)$, autrement dit encore que $[[u,v],f] = [u,[v,f]] - [v,[u,f]]$ (identité de Jacobi).
Or cette dernière identité est donnée comme acquise par l'énoncé au début du § II et aussi immédiate à vérifier avec la déf. du crochet de Lie dans $\mathscr{L}(E)$. □

14) Si N est de dimension 1, $N = \text{Vect}(u_0)$. Pour tout $u \in N$, $u = \lambda u_0$. Comme u_0 est nilpotente, en particulier $\ker(u_0) \neq \{0\}$.

On prend un $x \in \ker(u_0)$ avec $x \neq 0$. Alors pour tout $u \in N$, $u(x) = \lambda u_0(x) = 0$.

Remarque : Un s.e.v. de dim. 1 de $\mathscr{L}(E)$ est *toujours stable par le crochet de Lie* car si $N = \mathbb{K}u$ alors pour tout $(f,g) \in N^2$, $[f,g] = [\lambda u, \mu u] = \lambda\ \mu[u,u] = 0$. On va s'en servir au c).

15) *C'est une question très typique : comment montrer l'existence d'un element maximal pour quelque chose ?* On considère l'ensemble de tous les s.e.v. de N *distincts de N,* stables par le crochet. Comme on est en dim. finie, l'ensemble des dimensions de ces s.e.v. est fini donc il y en a un de dimension maximale. Le seul problème est d'être sûr que ce n'est pas $\{0\}$. Mais il est facile de trouver de s.e.v. de dim. 1 stables par le crochet : en fait tous le sont, comme remarqué à la fin de la question précédente.

Cela suffit pour conclure.

16) (i) Soit $u \in N_1$. D'abord il faut comprendre que si on considère $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(ad(u))$, où $\mathcal{B}$ est par déf. une base de N, c'est qu'on considère en fait la restriction de $ad(u)$ à N. Comme N est stable par le crochet de Lie, $ad(u)$ est bien un endomorphisme de N.

Pour montrer que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(ad(u))$ est de la forme demandée, il suffit de montrer que N_1 est stable par $ad(u)$, mais c'est évident puisque $u \in N_1$ et que N_1 est stable par crochet.

(ii) *Question sur l'application ρ :* En fait la propriété demandée pour ρ vient déjà d'une propriété de $ad(u)$ démontrée au 1) c) : pour tout $(u,v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\Phi_{[u,v]} = [ad(u), \Phi_v]$.

Application ici : On sait donc que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_{[u,v]}) = [\text{Mat}_{\mathcal{B}}(ad(u)), \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_v)]$.

Donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_{[u,v]}) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & [D,D'] \end{pmatrix}$.

Ceci montre que $\rho([u,v]) = [D,D']$ i.e. $\rho([u,v]) = [\rho(u), \rho(v)]$.

Culture : les applications Φ et ρ sont des « morphismes pour le crochet de Lie ».

17) a) *On va appliquer l'hypothèse de récurrence formulée avant la question 3) dans le cadre matriciel, donc non pas à N_1 mais à $\rho(N_1)$*

On note $N_1' = \{\rho(u),\ u \in N_1\}$. C'est un e.v. de dimension inférieure ou égal à $d-1$, stable par le crochet, dont tous les éléments sont nilpotents (car on a vu que u nilpotent entraîne $ad(u)$ nilpotent au 1) b) , et que $ad(u)$ nilpotent entraîne $\rho(u)$ nilpotent par I 5).

Donc l'hypothèse de recurrence s'applique à N_1' et donne qu'il existe un $X_0 \in M_{d,1}(\mathbb{K})$ tel que pour tout $D \in N_1'$, $DX_1 = 0$.

Autrement dit $\exists\, X_0 \in M_{d,1}(\mathbb{K}),\ \forall\ u \in N_1,\ \rho(u).X_0 = 0$.

b) Soit $v_0 \in S$ tel que $[v_0]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ X_0 \end{pmatrix}$. (Noter bien que $v_0 \in \mathscr{L}(E)$ mais il est représenté par une matrice colonne dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathscr{L}(E)$)Par déf. $v_0 \in S$ car sa composante sur N_1 est nulle.

En outre $[ad(u)(v_0)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \rho(u) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ X_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX_0 \\ \rho(u)X_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ par prop. de $\rho(u).X_0$.

On conclut que $ad(u)(v_0) \in N_1$ puisque sa composante sur S est nulle.

c),Notons $N_2 = N_1 \oplus \mathbb{K}v_0$ (la somme est bien directe puisque $v_0 \in S$).

Montrons que N_2 est stable par le crochet, ce qui par maximalité de N_1, montrera que $N_2 = N$ et donc N_1 est bien de dim. $d-1$.

Pour montrer que N_2 est stable par le crochet, il suiffait de prendre deux éléments $u + \lambda v_0$et $u' + \lambda' v_0$ de N_2.

On considère leur crochet qui par bilinéarité s'écrit $[u,u'] + \lambda[u,v_0] + \lambda'[v_0,u'] + \lambda\lambda'[v_0,v_0]$. Or $[u,u'] \in N_1$ car N_1 est stable par crochet, $[v_0,v_0] = 0$ et $[u,v_0] = ad(u)(v_0) \in N_1$ par construction de v_0. De même pour $[v_0,u'] = -[u',v_0]$. D'où la conclusion.

Remarque : *En fait, ce qu'on a montré aussi c'est que pour tout $(v,v') \in N$, $[v,v'] \in N_1$.*

18) a) Par déf. $E_1 = \bigcap_{u \in N_1} \ker(u)$. Donc E_1 est un s.e.v. comme intersection de s.e.v.

Soit $x \in E_1$, soit $v \in N$. On veut montrer que $v(x) \in N$ i.e. que pour tout $u \in N_1$, $u(v(x)) = 0$.

Mais $u(v(x)) = [u,v](x) + v(u(x)) = [u,v](x)$ car $u(x) = 0$ puisque $x \in E_1$. Mais mieux, avec la remarque faite à la fin de la question précédente, on sait que $[u,v] \in N_1$ et donc que $[u,v](x) = 0$. Donc $u(v(x)) = 0$ et la conclusion.

b) On sait que $E_1 \neq \{0\}$ car l'H.R. s'applique à N_1. Mais on a vu que $N = N_1 \oplus \mathbb{K}v_0$.

D'autre part on vient de montrer que E_1 est stable par tous les éléments de N donc aussi par v_0 et $(v_0)_{|E_1}$ est encore nilpotent donc de noyau non réduit à 0.

Donc si on choisit un $x_0 \in E_1 \cap \ker(v_0)$, non nul, on a, compte-tenu du fait que $N = N_1 \oplus Kv_0$, $\forall f \in N,\ f(x_0) = 0$.

On a donc démontré le théorème 1 (théorème de Engel) par récurrence.

c) C'est une nouvelle récurrence, cette fois sur la dimension de E, le théorème 1 permettant de faire l'induction.

- Si E est de dim 1, le seul endomorphisme nilpotent de E est l'application nulle.
- On suppose la propriété vraie pour tous les e.v. E de dim. $n-1$ pour un certain $n \geq 2$.

Soit E de dim. n et V un s.e.v. de $\mathscr{L}(E)$ stable par crochet dont tous les éléments sont nilpotents.

Par le théorème 1, on a un $x_1 \in E$, tel que $u(x_1) = 0$ pour tout $u \in V$.

On complète x_1 en une base $\mathcal{B} = (x_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.

Alors pour tout $u \in V$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & D_u \end{pmatrix}$ écriture par bloc où le premier 0 est le nombre 0, le second zéro est une colonne de $n-1$ zéros. Comme u est nilpotente, on sait que D_u est nilpotente (cf. partie I).

Alors l'ensemble des matrices A_u pour $u \in V$, représente un s.e.v. d'endomorphisme de $\mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$ stable par crochet (même vérification que plus haut avec le produit par bloc), donc l'H.R. s'applique aux A_u et cela donne la conclusion.