PROBLÈME

Dans ce problème, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Partie I

Q6. Un exemple

Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Démontrer que les matrices $\Pi_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteur puis calculer $\Pi_1 + 5\Pi_2$, $\Pi_1 + \Pi_2$ et $\Pi_1\Pi_2$.

Q7. On rappelle le lemme de décomposition des noyaux :
Si $P_1, P_2, ..., P_r$ sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à T, si u est un endomorphisme de E alors :

$$\operatorname{Ker}[T(u)] = \operatorname{Ker}(P_1(u)) \oplus \operatorname{Ker}(P_2(u)) \oplus ... \oplus \operatorname{Ker}(P_r(u)).$$

L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier $r = 2$.

Soit u un endomorphisme de E et soit P et Q deux polynômes premiers entre eux.
Justifier que $\operatorname{Ker}(P(u)) \subset \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\operatorname{Ker}(Q(u)) \subset \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$).

Démontrer que : $\operatorname{Ker}[(PQ)(u)] = \operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u))$.

Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

Q8. Soit u un endomorphisme de E et soit π_u son polynôme minimal.
On suppose que $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$ où les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier $i \in \{1, 2\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$.
Justifier qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 = 1$.

Pour la suite de cette partie, on notera $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} ... P_m^{k_m}$ la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 + ... + R_m Q_m = 1$.

Q9. On pose alors pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$.
Démontrer que pour tout couple (i,j) d'entiers distincts de $\{1,2,...,m\}$, on a les trois résultats suivants :

$$p_i \circ p_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = id_E,$$

et chaque p_i est un projecteur de E.
Les p_i seront appelés projecteurs associés à u.

Q10. Soit u un endomorphisme de E et soit χ_u son polynôme caractéristique : $\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ (avec les λ_i deux à deux distincts et les α_i des entiers naturels non nuls) et pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $N_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$ le sous-espace caractéristique associé à λ_i.
Justifier que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus ... \oplus N_m$.

Q11. Démontrer que $E = \mathrm{Im}\, p_1 \oplus \mathrm{Im}\, p_2 \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\, p_m$.

Q12. Démontrer que pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $\mathrm{Im}\, p_i = N_i$.

Partie II

Dans toute cette partie, on suppose que l'endomorphisme u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes.

Q13. Quel est alors le polynôme minimal π_u de u ?

Q14. On note toujours, pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X - \lambda_i$, et on pose $\theta_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)}$.

Donner, sans détails, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\pi_u}$ puis démontrer que les projecteurs associés à u sont, pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $p_i = \dfrac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

Q15. Démontrer que $X = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$ puis que $u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$ (décomposition spectrale de u).

Q16. Exemple : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Justifier que la matrice *A* est diagonalisable et calculer la matrice A^2.

b) En déduire le polynôme minimal π_A de la matrice *A* puis la décomposition spectrale de la matrice *A*. On notera Π_1 et Π_2 les matrices des projecteurs associés.

c) Calculer, pour tout entier naturel *q*, A^q en fonction des matrices Π_1 et Π_2.

Q17. On note $\mathbb{C}[v]$ l'algèbre des polynômes d'un endomorphisme *v* d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
Démontrer que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[v]$ est égal au degré du polynôme minimal π_v de l'endomorphisme *v*.

Q18. On revient au cas *u* diagonalisable avec $\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$.

Démontrer que la famille $(p_1, p_2, ..., p_m)$ des projecteurs associés à *u* est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$.

Q19. Dans le cas d'un endomorphisme *u* non diagonalisable, la famille $(p_1, p_2, ..., p_m)$ des projecteurs associés à *u* est-elle toujours une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$?

Q20. Nous avons vu que si *u* est un endomorphisme de *E* diagonalisable, il existe *m* endomorphismes non nuls p_i de *E*, tels que pour tout entier *q* on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q p_i$.

Nous allons étudier une « réciproque ».

Soit *u* un endomorphisme de *E*, $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe *m* endomorphismes non nuls f_i de *E* et *m* complexes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ distincts, tels que pour tout entier naturel *q* on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q f_i$.

Démontrer que *u* est diagonalisable.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 1126 – D'après documents fournis