Devoir surveillé 1 (4h)

Les calculatrices et autres appareils électroniques (téléphones etc.), l'usage de stylo à encre effaçable et des blancs de correction sont interdits. Les couleurs autorisées sont le bleu, le noir et le rouge est toléré pour les encadrés. Encadrez ou soulignez vos résultats, séparez clairement vos questions, la clarté de votre présentation est un élément important d'appréciation.

Exercice

a) Donner la définition du déterminant de Vandermonde $V(x_1,\dots,x_n)$ pour une famille $x_1,\dots,x_n$ de nombres complexes et démontrer une formule explicite pour $V(x_1,\dots,x_n)$.

b) On note $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$.
Soit $I=[\![1,n]\!]^2$ soit $r\in\mathbb{N}$ et soit $(J_k)_{k=1,\dots,r}$ une *partition* de I c'est-à-dire que les ensembles $J_1,\dots,J_r$ sont deux à deux disjoints et $I=\bigcup_{k=1}^r J_k$
(Par exemple si $n=2$, avec $J_1=\{(1,1),(1,2)\}$ et $J_2=\{(2,1),(2,2)\}$ la famille (J_1,J_2) réalise une partition de $I=[\![1,2]\!]^2$, puisque $I=J_1\cup J_2$ avec $J_1\cap J_2=\varnothing$).
En revenant au cas général d'une partition $(J_k)_{k=1,\dots,r}$ de $I=[\![1,n]\!]^2$, pour chaque $k\in[\![1,r]\!]$, on note $\mathcal{E}_k=\mathrm{Vect}(\{E_{i,j},\ (i,j)\in J_k\})$. Montrer que

$$M_n(\mathbb{C})=\oplus_{k=1}^r\mathcal{E}_k.$$

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\omega=\exp(2i\pi/n)$. Soit $A=\mathrm{diag}(1,\omega,\dots,\omega^{n-1})$ et $B=\begin{pmatrix}0&1&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&0&\dots&0\end{pmatrix}$.

i) Calculer les différentes matrices B^ℓ pour $\ell\in\mathbb{N}$: on donnera l'expression de $B^\ell(i,j)$ pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.

ii) Pour tout $\ell\in[\![0,n-1]\!]$, on note $\mathcal{E}_\ell=\mathrm{Vect}(\{E_{i,j},\ i\equiv j-\ell\ \ [n]\})$
Montrer que pour tout $(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2$, $A^kB^\ell\in\mathcal{E}_k$.

iii) Conclure que la famille des $(A^kB^\ell)_{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2}$ est une base de $M_n(\mathbb{C})$.

Problème

Notations et définitions

On note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à coefficients complexes.
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n\geqslant0}u_n$ converge.

Définition 1 : On appelle *procédé sommatoire* tout couple $(\mathcal{C}',S)$, dans lequel $\mathcal{C}'$ est une partie de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $S:\mathcal{C}'\to\mathbb{C}$ est une application, vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) *Axiome de prolongement :* $\mathcal{C}\subset\mathcal{C}'$ et pour tout $u\in\mathcal{C}, S(u)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.
Autrement dit S est un prolongement de la sommation habituelle des séries convergentes.

(ii) *Axiome de linéarité :* $\mathcal{C}'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et S est linéaire.

Définition 2 : On dit qu'un procédé sommatoire est *stable par translation* si, en outre, il vérifie l'axiome (iii) suivant :

(iii) Pour toute suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}'$, si on appelle $v=\tau u$ la suite translatée définie par $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $v_n=u_{n+1}$, alors on a $v\in\mathcal{C}'$ et $S(u)=u_0+S(v)$.

Si $(\mathcal{C}',S)$ est un procédé sommatoire, alors une série $\sum_{n\geqslant0}u_n$ pour laquelle $u\in E$ sera appelée *une série convergente au sens de S*, ou encore *S-convergente*. On notera aussi $S(u)=\mathrm{S}_{n=0}^{+\infty}u_n$.

Q 0) Excursion préliminaire : Montrer par la méthode de votre choix que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln(2)$.

I L'exemple de la sommation de Cesàro

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note dans ce problème $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ et $U_0 = 0$.

On dit que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est *convergente au sens de Cesàro* si, et seulement si, $M_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k$ converge quand $n \to +\infty$. Dans ce cas, on pose :

$$C(u) = C_{n=0}^{+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k.$$

Dans ce I, on note $\mathcal{C}'$ l'ensemble des suites u telles que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ soit convergente au sens de Cesàro.

Q 1) Montrer que le couple $(\mathcal{C}', C)$ est un *procédé sommatoire* au sens de la définition 1 ci-dessus.

Q 2) Montrer que $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n$ est *convergente au sens de Cesàro* et préciser la valeur de $C_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$.

Q 3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \equiv 0\ [3], \\ -1 \text{ si } n \equiv 1\ [3] \\ 0 \text{ si } n \equiv 2\ [3]. \end{cases}$

Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est *convergente au sens de Cesàro* et préciser la valeur de $C_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Q 4) Cas particuliers des séries à termes positifs : Montrer que si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est une série à termes positifs divergente alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{U_1 + \cdots + U_{2n}}{2n} \geq \dfrac{U_{n+1}}{2}$. En déduire qu'une telle série à termes positifs divergente n'est jamais convergente au sens de Cesàro.

Q 5) Une condition nécessaire :

a) Montrer que si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est *convergente au sens de Cesàro* alors $U_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$.
Indication – On pourra écrire U_n en fonction de M_n.

b) Montrer que la réciproque du a) est fausse. *Indication* –Considérer $H_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$.

c) Montrer que la série $\left(\sum(-1)^{n-1} n\right)$ n'est pas convergente au sens de Cesàro.

Q 6) Montrer que le procédé de sommation de Cesàro est *stable par translation* au sens de la définition 2 ci-dessus.

Q 7) Une autre forme de la convergence au sens de Cesàro et ses conséquences :

a) Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est *convergente au sens de Cesàro* si, et seulement si, la suite $(\sum_{k=0}^{n}(1-\frac{k}{n})u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Montrer aussi que dans ce cas, $C(u) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n}(1-\dfrac{k}{n})u_k$.

b) En déduire le résultat suivant sur les séries convergentes : si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est *convergente* au sens usuel, alors :

$$\frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

c) Application à deux théorèmes Taubériens (théorèmes dont l'hypothèse est la convergence de Cesàro et une autre hypothèse et dont la conclusion est la convergence usuelle).

(1) Montrer que si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est *convergente au sens de Cesàro* et si $\frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est *convergente* au sens usuel.

(2) Montrer que si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est *convergente au sens de Cesàro* et si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(\frac{1}{n})$ alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est *convergente* au sens usuel.

II L'exemple de la sommation d'Euler

Définition – Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$. On dit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est *Euler-convergente* si, et seulement si,

$$\frac{1}{2^N}\sum_{n=1}^{N}\binom{N}{n}U_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$$

On notera alors, dans ce paragraphe II, $\mathcal{C}'$ l'ensemble des suites (u_n) telle que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est *Euler-convergente* et pour une telle suite $E(u) = E_{n=0}^{+\infty} u_n := \ell$.

Q 8) Montrer que $(\mathcal{C}', E)$ est un *procédé sommatoire* au sens de la définition 1.

Q 9) Une autre expression de la sommation d'Euler :

a) Soit $\tau : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $u \mapsto \tau u$ où $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(\tau u)_n = u_{n+1}$, l'opérateur de translation à gauche et id l'opérateur identité. Montrer l'égalité suivante dans l'algèbre $(\mathscr{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), +, \circ, \cdot)$:

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ \left(\frac{\tau - \mathrm{id}}{2}\right) \circ \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{\mathrm{id} + \tau}{2}\right)^n = (\tau - \mathrm{id}) \circ \frac{1}{2^N} \left(\sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} (\mathrm{id} + \tau + \cdots + \tau^{n-1})\right).$$

b) Montrer que $\tau - \mathrm{id}$ est surjective et en déduire que :

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{\mathrm{id} + \tau}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{N-1}} \left(\sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} (\mathrm{id} + \tau + \cdots + \tau^{n-1})\right).$$

c) En déduire que pour toute suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, en notant $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{u}_n := \dfrac{1}{2^{n+1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$:

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2^N} \sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} U_n = \sum_{n=0}^{N-1} \widetilde{u}_n.$$

d) En déduire le **théorème de E-convergence** suivant : une série $(\sum_{n\geqslant 0} u_n)$ est *Euler-convergente* si, et seulement si, $(\sum_{n\geq 0} \widetilde{u}_n)$ est convergente au sens usuel. Montrer aussi que si $(\sum_{n\geqslant 0} u_n)$ est une série convergente au sens usuel, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Q 10) Deux exemples :

a) Exemple 1 : déterminer pour quels $z \in \mathbb{C}$ la série $\sum (-1)^n z^n$ est convergente au sens usuel, et pour quels $z \in \mathbb{C}$ elle est *Euler-convergente*.
Déterminer aussi sa somme dans chacun des deux cas.

b) Exemple 2 : montrer que la série harmonique $(\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n+1})$ n'est *pas Euler-convergente*.

Q 11) Déduire du théorème de E-convergence de la question 9d) que le procédé $(\mathcal{C}', E)$ de la sommation d'Euler est aussi *stable par translation* au sens de la définition 2.

III Application de la sommation d'Euler aux séries alternées

On note encore τ l'opérateur de translation défini à la question 9a) et on note $\Delta = \tau - \mathrm{id}$ l'opérateur de différence finie. Ainsi si $w = (w_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (\Delta w)_n = w_{n+1} - w_n.$$

On note $\Delta^n = \Delta \circ \cdots \circ \Delta$ la composée n fois de Δ.

Q 12) Justifier que pour toute suite $(w_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $(\Delta^n w)_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} w_k$.

Q 13) On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ et que cette série est absolument convergente.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que la série $\sum w_n \dfrac{x^n}{n!}$ est absolument convergente. Montrer que :

$$e^{-x} \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\Delta^n w)_0 \frac{x^n}{n!}.$$

Dans la suite on s'intéresse à des suites qu'on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n w_n$ avec d'abord $(w_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, puis ensuite (w_n) positive, et on montre alors que la sommation d'Euler peut aussi être un procédé d'amélioration de convergence de ces séries alternées.

Q 14) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n w_n$ est convergente au sens d'Euler si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (\Delta^n w)_0$ converge au sens usuel et qu'alors on a l'égalité :

$$E_{n=0}^{+\infty}(-1)^n w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (\Delta^n w)_0$$

La régularité du procédé de sommation d'Euler entraîne donc que si la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n w_n$ est convergente, on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (\Delta^n w)_0$$

Cette formule peut servir de méthode d' «accélération de convergence» du fait que, bien souvent, le membre de droite est une série dont les restes tendent plus vite vers 0 que ceux du membre de gauche, ce qui est illustré dans la question suivante.

Q 15) a) Soit la série de Leibniz $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$. On peut montrer (de manière analogue à la Q0) que sa somme usuelle est égale à $\pi/4$. Montrer qu'il existe des réels $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que les restes de cette série vérifient

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}\right| \geqslant \frac{a}{(N+b)^2}, \qquad \text{pour tout } N \geqslant 1$$

b) Soit $w_n = 1/(2n+1)$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que $(\Delta^n w)_0 = I_n$, où $I_n = \int_0^1 \left(t^2-1\right)^n \, \mathrm{d}t$ (utiliser l'écriture $w_n = \int_0^1 t^{2n} \, \mathrm{d}t$)

c) Montrer que $\pi/4 = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n I_n/2^{n+1}$, et que les restes de cette série vérifient

$$0 \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(-1)^n I_n}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^N}, \qquad \text{pour tout } N \geqslant 1$$

Ainsi la série transformée converge beaucoup plus vite vers $\pi/4$.

Hors Barème : D.M. 5/2

Q 16) Montrer que le procédé précédent ne conduit pas toujours à une *accélération* de la convergence, en l'appliquant à $\sum(-1)^n \frac{1}{4^n}$ (qui converge déjà vite !)

Q 17) **Remarque préliminaire :** Pour une série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$, on définit la sommation d'Euler au moyen de la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $v_n = u_{n+1}$, et l'on pose

$$E_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n = E_{n=0}^{+\infty}(-1)^n v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (\Delta^n v)_0$$

Comme

$$(\Delta^n v)_0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} v_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} u_{k+1} = (\Delta^n u)_1$$

on obtient

$$E_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (\Delta^n u)_1$$

Un exemple de sommation d'Euler prolongeant les formules de Taylor : On a $\pi/3 = \arctan(\sqrt{3})$, mais le développement de Taylor en 0 de la fonction arctan ne permet pas d'écrire

$$\frac{\pi}{3} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} \frac{(\sqrt{3})^{2n-1}}{2n-1} \quad (\textit{beurk!})$$

car la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}u_n$, où $u_n = (\sqrt{3})^{2n-1}/(2n-1)$, est grossièrement divergente. Mais montrer que la sommation d'Euler permet de récupérer la valeur de $\pi/3$, autrement dit montrer que :

$$\frac{\pi}{3} = E_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} \frac{(\sqrt{3})^{2n-1}}{2n-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1-3t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$$