DM 4 : Algèbre linéaire

Pour le 13 octobre 2025

Problème I : Hyperplans de $M_n(K)$ stables par multiplications

Ce problème permet de réviser les propriétés des formes linéaires et les propriétés liées au rang.

Soit K un corps et $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Pour tout $A \in M_n(K)$, on note $\varphi_A \,:\, M_n(K) \to K$, $M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$.

Q 1) a) Montrer que φ_A est une forme linéaire de $M_n(K)$.

b) Montrer que pour toute forme linéaire ψ de $M_n(K)$, il existe une unique matrice $A \in M_n(K)$ telle que $\psi = \varphi_A$.

Jusqu'à la question 6, on considère une hyperplan $\mathscr{H}$ de $M_n(K)$ et on suppose que $\mathscr{H}$ est stable par multiplication. On va chercher des conditions sur un tel hyperplan pour voir s'il en existe.

Q 2) Montrer qu'il existe $A \in M_n(K)$ tel que $\mathscr{H} = \ker \varphi_A$. On fixe une telle matrice A dans ce qui suit, jusqu'au 6.

Q 3) Soit $M \in \mathscr{H}$.

a) Montrer que $\mathscr{H} \subset \ker \varphi_{AM}$

b) En déduire que $AM \in \mathrm{Vect}(A)$.

Q 4) On note $\mathscr{N}$ l'ensemble des $M \in M_n(K)$ telles que $AM = 0$.

a) Vérifier que $\mathscr{N}$ est un s.e.v. de $M_n(K)$ inclus dans $\mathscr{H}$.

b) Soit r le rang de A. Montrer que $\dim \mathscr{N} = n(n-r)$.

Q 5) **Une contrainte très forte !**

En considérant l'application $f \,:\, \mathscr{H} \to M_n(K)$, $M \mapsto AM$, montrer que si un tel hyperplan $\mathscr{H}$ stable par multiplication existe dans $M_n(K)$, alors $n = 2$ et $\mathrm{rg}(A) = 1$,

Q 6) Montrer qu'on a aussi $\mathrm{Tr}(A) = 0$. *Indication* – Considérer, en justifiant son existence, un élément M de $\mathscr{H} \setminus \mathscr{N}$.

Conclusion de cette analyse on a montré dans ce qui précède que les seuls candidats hyperplans stables par multiplications dans $M_n(K)$ étaient forcément dans $M_2(K)$ et de la forme $\mathscr{H} = \{M \in M_2(K), \mathrm{Tr}(AM) = 0\}$ avec A une matrice de rang 1 et de trace nulle.

Q 7) Synthèse : soit réciproquement $A \in M_2(K)$ de rang 1 et de trace nulle. Soit $\mathscr{H} = \{M \in M_2(K), \mathrm{Tr}(AM) = 0\}$ et $\mathscr{N} = \{M \in M_2(K),\ AM = 0\}$.

a) Montrer que $\mathscr{N} \oplus K.I_2 = \mathscr{H}$.

b) En déduire que $\mathscr{H}$ est stable par multiplication matricielle.

Problème II : Algèbres de Lie nilpotentes

II. 1) Généralités sur les endomorphismes nilpotents :

N.B. *Cette partie démontre des propriétés très élémentaires des endomorphismes nilpotents, dont certaines deviendront immédiates après le chapitre R3.*

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. n et $u \in \mathscr{L}(E)$

Q 8) *Démonstration* géométrique *du fait qu'une matrice Triangulaire Supérieure Stricte (T.S.S.) est nilpotente.*

a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On note $V_0 = \{0\}$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $V_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

On suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u(V_k) \subset V_{k-1}$. Montrer que u est nilpotent.

b) *En déduire* qu'une matrice T.S.S. est toujours nilpotente.

Q 9) *Une démonstration du fait qu'un endomorphisme nilpotent peut être représenté par une matrice T.S.S. (ce sera du cours du R3)*

a) On suppose que u est nilpotent d'indice d. Montrer que :

$$\{0\} \subsetneq \ker u \subsetneq \ker u^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker u^{d-1} \subsetneq \ker u^d = E.$$

b) En reprenant les notations introduites plus haut, en déduire qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u(V_k) \subset V_{k-1}$.

c) Démontrer que l'indice de nilpotence d est toujours inférieur ou égal à la dimension n de l'espace.

N.B. 5/2 (ou 3/2 après la fin du R2) démontrer cette propriété très rapidement à l'aide du théorème de Cayley-Hamilton.

Q 10) Soit $\mathcal{B}_0$ une base de $\mathbb{K}^2$ et $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$ dont les matrices respectives dans $\mathcal{B}_0$ sont $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il n'existe *pas* de base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices de u et de v soient simultanément T.S.S.

Q 11) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire par blocs, où les blocs A et D sont des matrices carrées quelconques, pas forcément de même taille.

Montrer que M est nilpotente si, et seulement si, A et D le sont.

Q 12) Donner un exemple de matrice nilpotente dont aucune des entrées n'est nulle.

II 2) Théorème sur les « algèbres de Lie nilpotentes »

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n.

Définition (crochet de Lie) Pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, on note $[u, v] = u \circ v - v \circ u$.

De même pour tout $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$, $[A, B] = AB - BA$.

Une partie V de $\mathcal{L}(E)$ (resp. de $M_n(\mathbb{K})$) est dite *stable par le crochet de Lie* si, et seulement si, pour tout $(u, v) \in V^2$, $[u, v] \in V$ (de même pour les matrices).

Définition : dans ce problème, on appelle *algèbre de Lie* tout s.e.v. d'un espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ qui est stable par le crochet de Lie.

Culture : ces « algèbres d'un type différent » sont très importantes en maths et en physique...

Propriété utile du crochet de Lie : l'identité de Jacobi On vérifie (calcul !) que :

$$\forall (u, v, w) \in \mathcal{L}(E)^3,\ [u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0.$$

Notation : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(\mathbb{K})$).

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $B \in M_n(\mathbb{K})$), on définit $ad(u)(f) := u \circ f - f \circ u = [u, f]$ (resp. $ad(A)(B) = AB - BA = [A, B]$).

Le but de cette partie est de démontrer les résultats suivants :

Théorème 1 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n et soit N un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$, stable par le crochet de Lie, dont tous les éléments sont nilpotents. Alors il existe un $x \in E \setminus \{0\}$ tel que pour tout $u \in N$, $u(x) = 0$.

Ce théorème a la conséquence, pour nous plus parlante, suivante :

Théorème 2 : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. finie et V un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$ stable par le crochet, dont tous les éléments sont nilpotents. Alors il existe une base de E dans laquelle tous les éléments de V sont représentés par des matrices T.S.S.

Q 13) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $ad(u) : \ f \in \mathcal{L}(E) \mapsto [u, f] \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que $ad(u) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

b) Montrer que si u est nilpotent alors $ad(u)$ est nilpotent dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

c) Montrer que $ad : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$, $u \mapsto ad(u)$ est un « morphisme pour le crochet de Lie », ce qui signifie que :

$$\forall (u,v) \in \mathscr{L}(E)^2,\ ad([u,v]) = [ad(u), ad(v)].$$

d) Démontrer alors le théorème 1 dans le cas particulier où N est de dimension 1.

Soit $d \geq 2$. On suppose que le théorème 1 est vrai pour toute algèbre de Lie dont tous les éléments sont nilpotents, de dimension inférieure ou égale à $d-1$. Soit N de dimension d vérifiant les hypothèses du théorème. On remarque que pour chaque $u \in N$, $ad(u)$ peut être vu comme un endomorphisme de N.

Q 14) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel N_1 de N stable par le crochet de Lie, distinct de N et de $\{0\}$, de dimension maximale.

Soit S un supplémentaire de N_1 dans N. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de N_1 et $(e_{r+1}, \dots, e_d)$ une base de S.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ la base de N ainsi obtenue. (Attention les e_i sont des endomorphismes !).

Q 15) (i) Montrer que pour tout $u \in N_1$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(ad(u))$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où $A \in M_r(\mathbb{K})$, $B \in M_{r,d-r}(\mathbb{K})$ et $D \in M_{d-r}(\mathbb{K})$.

On note $\rho(u)$ la matrice $D \in M_{d-r}(\mathbb{K})$.

(ii) Montrer que l'application $\rho : N_1 \to M_{d-r}(\mathbb{K})$, $u \mapsto \rho(u)$ est une application linéaire qui préserve le crochet i.e. telle que pour tout $(u,v) \in N_1^2$, $\rho([u,v]) = [\rho(u), \rho(v)]$.

Q 16) a) Montrer qu'il existe un $X_0 \in M_{d-r,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $\rho(u).X_0 = 0$ pour tout $u \in N_1$.

b) En déduire qu'il existe un $v_0 \in S$ non nul tel que $ad(u)(v_0) \in N_1$ pour tout $u \in N_1$.

c) En déduire que $\dim(N_1) = d - 1$.

Q 17) a) Soit E_1 l'ensemble des vecteurs x de E tels que pour tout $u \in N_1$, $u(x) = 0$. Montrer que E_1 est un s.e.v. de E stable par tout élément de N.

b) En déduire qu'il existe un $x_0 \in E$ non nul tel que pour tout $f \in N$, $f(x_0) = 0$ et conclure pour le théorème 1.

c) En déduire le théorème 2.

Remarque : un s.e.v. de $M_n(\mathbb{K})$ stable par produit sera en particulier stable par crochet.