D.M. 2 : fractions continues, solution

Ce sujet est en grande partie adapté d'un sujet posé par A. Troesch, en MPSI lycée LLG

Q1) Il s'agit d'un nombre obtenu avec un nombre fini d'opérations $+, \times, /$ à partir d'entiers non nuls, donc un nombre rationnel.

Q2) a) Par récurrence finie. Notons $H(k)$ la propriété : $x = [a_0, \dots, a_k]\left(\frac{r_k}{r_{k-1}}\right)$.

• Pour $k = 0$, on veut montrer que $[a_0](\frac{r_0}{r_{-1}}) = x$.

Mais par déf. $[a_0](\frac{r_0}{r_{-1}}) = a_0 + \frac{r_0}{r_{-1}} = \frac{a_0 r_{-1} + r_0}{r_{-1}} = \frac{r_{-2}}{r_{-1}} = \frac{p}{q} = x$.

• Supposons $H(k)$ vraie pour un $k \leq n-1$.

On considère la relation de récurrence définissant les fractions continues dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}
[a_0, \dots, a_{k+1}]\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right) &= [a_0, \dots, a_k]\left(\frac{1}{a_{k+1} + \frac{r_{k+1}}{r_k}}\right) \\
&= [a_0, \dots, a_k]\left(\frac{r_k}{a_{k+1} r_k + r_{k+1}}\right) \\
&= [a_0, \dots, a_k]\left(\frac{r_k}{r_{k-1}}\right) \quad (\dagger)
\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de la formule de l'algorithme d'Euclide. Avec $H(k)$ et $(\dagger)$ on conclut bien que $H(k+1)$ est vraie.

b) Avec la formule du a) pour $k = n$, comme $r_n = 0$, on obtient :

$$x = [a_0, \dots, a_n](0) = [a_0, \dots, a_n]$$

avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et pour tout $i \geq 1$, $a_i \in \mathbb{N}^*$ car pour tout $i \geq 0$, $r_i \geq 0$ et pour tout $i < n$, $r_i > r_{i+1}$ par déf. de la division euclidienne. Enfin si $a_n = 1$, on remplace cette écriture par

$$x = [a_0, \dots, a_{n-1} + 1]$$

qui donne une écriture standard.

c) (i) L'exemple de $x = 3/2$ donne un exemple concret où $a_n = 1$.

Pour $p = 3$ et $q = 2$, l'algo. d'Euclide donne $3 = 1 \times 2 + 1$ donc $a_0 = 1$.

Puis $2 = 2 \times 1 + 0$ donc $a_1 = 2$ et l'algorithme s'arrête.

On écrit $\frac{3}{2} = [1, 2]$ autrement dit $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$.

(ii) Pour $x = 37/13$, l'algo. d'Euclide donne ;

$37 = 2 \times 13 + 11$ donc $a_0 = 2$

$13 = 1 \times 11 + 2$ donc $a_1 = 1$

$11 = 5 \times 2 + 1$ donc $a_2 = 5$

$2 = 2 \times 1 + 0$ donc $a_3 = 2$

Donc $37/13 = [2, 1, 5, 2]$.

Q3) a) $[a_0, \dots, a_n] = a_0 + \dfrac{1}{[a_1, \dots, a_n]}$

b) En traduisant l'égalité du a) puis en réduisant au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
\frac{p(a_0, \dots, a_n)}{q(a_0, \dots, a_n)} &= a_0 + \frac{q(a_1, \dots, a_n)}{p(a_1, \dots, a_n)} \\
&= \frac{a_0 p(a_1 \dots, a_n) + q(a_1, \dots, a_n)}{p(a_1, \dots, a_n)} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Comme $p(a_1, \dots, a_n) \wedge q(a_1, \dots, a_n) = 1$, on sait que

$$p(a_1, \dots, a_n) \wedge (a_0 p(a_1 \dots, a_n) + q(a_1, \dots, a_n)) = 1$$

Ainsi l'égalité (1) est une égalité entre deux fractions écrites sous forme irréductible, ce qui par unicité donne :

$$\begin{cases} p(a_0,\dots,a_n) = a_0 p(a_1\dots,a_n) + q(a_1,\dots,a_n) \\ q(a_0,\dots,a_n) = p(a_1,\dots,a_n). \end{cases}$$

c) Encore pour alléger les notations notons $p'_n = p(a_1,\dots,a_n)$ et $q'_n = q(a_1,\dots,a_n)$. La formule du b) se réécrit donc :

$$\begin{aligned} p_n &= a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1} && (2) \\ q_n &= p'_{n-1} && (3) \end{aligned}$$

On veut montrer, pour tout $n \geq 1$, la propriété

$$H(n) : \ \forall\,(\alpha_0,\dots,\alpha_n) \in Z_n,\ p(\alpha_0,\dots,\alpha_n) = \alpha_n p(\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}) + p(\alpha_0,\dots,\alpha_{n-2})$$

et de même avec q à la place de p.

• Initialisation pour $n = 1$. : (la déf. de p_{-1} et q_{-1} prolonge la relation dans le passé et simplifie ici l'initialisation). On veut montrer que $p_1 = a_1 p_0 + p_{-1}$ et $q_1 = a_1 q_0 + q_{-1}$.
Or d'un côté $p_0 = a_0$ et $p_{-1} = 1$ et $q_0 = 1$ et $q_{-1} = 0$ doc on veut montrer que $p_1 = a_1 a_0 + 1$ et $q_1 = a_1$.
Et c'est immédiat par relation du b).

• Hérédité, on suppose $H(n-1)$ vraie, on considère une suite $(a_0,\dots,a_n) \in Z_n$ et on applique $H(n-1)$ à la suite $(a_1,\dots,a_n)$.
On obtient donc

$$\begin{aligned} p'_{n-1} &= a_n p'_{n-2} + p'_{n-3}, \\ q'_{n-1} &= a_n q'_{n-2} + q'_{n-3} \end{aligned}$$

on en déduit, grâce à (2) que :

$$\begin{aligned} p_n &= a_0\,(a_n p'_{n-2} + p'_{n-3}) + (a_n q'_{n-2} + q_{n-3}) \\ &= a_n\,(a_0 p'_{n-2} + q'_{n-2}) + (a_0 p'_{n-3} + q_{n-3}) \\ &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n &= a_n p'_{n-2} + p'_{n-3} = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \text{grâce à } (3) \end{aligned}$$

ce qui montre bien $H(n)$

d) En réduisant le membre de gauche au même dénominateur, la formule à montrer devient simplement :

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$$

Or en multipliant la première ligne de la formule obtenue au c) par q_{n-1} et la seconde par p_{n-1} et en retranchant membre à membre les inégalités obtenues on a :

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = -(p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2}) \quad (*)$$

Comme $p_0 = a_0$ et $q_0 = 1$ et $p_{-1} = 1$ et $q_{-1} = 0$ donc pour $n = 1$, on a $p_{-1} q_0 - p_0 q_{-1} = 1$ et avec cette initialisation et la relation $(*)$, on immédiatement la conclusion.

Q4) a) On sait que $q_{-1} = 0$ et $q_0 = 1$ et $q_1 = a_1 > 1$. Ensuite on sait que pour tout $i \geq 1$, $a_i \geq 1$, donc $q_n \geq q_{n-1} + q_{n-2}$ donc en supposant par réc. que $q_{n-2} > 0$ (vrai pour $q_0 > 0$), on a $q_n > q_{n-1}$.

b) La relation de la question citée donne tout : $p_{2n+2}/q_{2n+2} - p_{2n}/q_{2n} = \dfrac{1}{q_{2n+1} q_{2n}} - \dfrac{1}{q_{2n+2} q_{2n+1}} > 0$ par la croissance de (q_n).

Donc $(p_{2n})_{/q_{2n}}$ est croissante et de même (p_{2n+1}/q_{2n+1}) est décroissante. Enfin $\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \dfrac{p_{2n}}{q_{2n}} = \dfrac{1}{q_{2n} \cdot q_{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ comme suite d'entiers strictement croissante.

Q5) a) (a) On montre par récurrence la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ sont bien définis, et $x = [a_0, \ldots, a_n]\,(b_n)$. - Pour $n = 0$, l'énoncé définit a_0 et b_0, et de plus

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = a_0 + b_0 = [a_0]\,(b_0)\,.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vérifiée au rang n. Alors, pour commencer, $b_n \neq 0$, sinon $x = [a_0, \ldots, a_n]$ serait rationnel d'après la question 1). Donc a_{n+1} et b_{n+1} sont bien définis. De plus,

$$\begin{aligned} x &= [a_0, \ldots, a_n]\,(b_n) \\ &= [a_0, \ldots, a_n]\left(\frac{1}{1/b_n}\right) \\ &= [a_0, \ldots, a_n]\left(\frac{1}{a_{n+1} + b_{n+1}}\right) \\ &= [a_0, \ldots, a_{n+1}]\,(b_{n+1})\,. \end{aligned}$$

- Cela prouve bien, d'après le principe de récurrence, que les a_n et b_n sont bien définis, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x = [a_0, \ldots, a_n]\,(b_n)\,.$$

b) (i) Pour $x = \sqrt{2}$, on a $a_0 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ et donc $b_0 = \sqrt{2} - 1$.
Alors $\frac{1}{b_0} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = 1 + \sqrt{2}$ donc $a_1 = \lfloor 1 + \sqrt{2}\ \rfloor = 2$ et $b_1 = (1 + \sqrt{2} - 2) = \sqrt{2} - 1$. Et là, comme $b_1 = b_0$, on aura $a_2 = a_1, b_2 = b_1$ la suite (a_n) est constante égale à 2 à partir du rang 1. Autrement dit, une fois qu'on aura montré la question e) on aura $\sqrt{2} = [1, 2, 2, \ldots, 2, \ldots]$.
(ii) Pour le nombre d'or c'est encore plus joli : $a_0 = \lfloor x \rfloor = 1$ et $b_0 = x - 1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Alors $1/b_0 = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{2.(\sqrt{5}+1)}{4} = x$. Cette fois les suites (b_n) et (a_n) sont constantes dès le premier rang et $x = [1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots]$.
c) Pour tout n la fonction F_{n+1} est la fonction qui à x associe $F_n\left(\frac{1}{a_{n+1}+x}\right)$. Or, $x \mapsto \frac{1}{a_{n+1}+x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc F_{n+1} est obtenue en composant F_n par une fonction strictement décroissante. On en déduit que si F_n est strictement monotone, F_{n+1} aussi, de sens de variation opposé. Or $F_0 = x \mapsto a_0 + x$ est strictement croissante. Ainsi, les F_n sont toutes strictement monotones, de sens de variation alternant : toutes les fonctions F_{2n} sont de même sens de variation que F_0 et F_{2n+1} de sens de variation opposé. Ainsi si n est pair, F_n est strictement croissante, et si n est impair, F_n est strictement décroissante.
d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc, par croissance de F_{2n} et positivité de b_{2n} :

$$[a_0, \ldots, a_{2n}] = [a_0, \ldots, a_{2n}]\,(0) \leqslant [a_0, \ldots, a_{2n}]\,(b_{2n}) = x.$$

De façon similaire,

$$\begin{aligned} [a_0, \ldots, a_{2n+1}] &= [a_0, \ldots, a_{2n}]\left(\frac{1}{a_{2n+1}}\right) \\ &\geqslant [a_0, \ldots, a_{2n}]\,(b_{2n}) \\ &= x. \end{aligned} \qquad \left(\text{car } F_{2n} \text{ est croissante et } a_{2n+1} \leqslant \frac{1}{b_n}\right).$$

Ainsi,

$$[a_0, \ldots, a_{2n}] \leqslant x \leqslant [a_0, \ldots, a_{2n+1}]\,.$$

(e) Or, on sait d'après la Q4d), que ($[a_0, \ldots, a_n]$) converge vers $[a_0, \ldots, a_n, \ldots]$, donc aussi ($[a_0, \ldots, a_{2n}]$) et ($[a_0, \ldots, a_{2n+1}]$). Ainsi, en passant à la limite dans l'encadrement précédent (ce n'est pas vraiment le théorème d'encadrement ici, puisqu'il n'y a pas d'existence de limite à établir pour le terme encadré), on obtient :

$$x = [a_0, \ldots, a_{,n} \ldots]\,.$$

(f) Ici, on ne nous demande pas de calculer les (a_n), on a déjà vu que pour $\sqrt{2}$ la suite des (a_n) vaut $(1, 2, 2, \dots)$. Connaissant déjà cette suite, on calcule les (p_n) et (q_n) avec la relation de récurrence $p_n = a_n * p_{n-1} + p_{n-2}$ (et de même pour q_n). Cela donne le code Python très simple suivant ;

```
def racine2(n):
    if n==0:
        return 1
    else :
        pn=1
        qn=1
        pn_1=1
        qn_1=0
        for i in range(n):
            pn,qn,pn_1,qn_1=2*pn+pn_1,2*qn+qn_1,pn,qn
    return pn/qn
```

Exercice à faire : écrire une autre fonction qui calcule la suite des (a_n) pour un x quelconque.

Q6) On suppose dans un premier temps k_0 impair. On a alors :

$$[a_{k_0}, \dots, a_n, \dots] = a_{k_0} + \frac{1}{[a_{k_0+1}, \dots]} > a_{k_0}.$$

De la même manière

$$[a_{k_0+1}, \dots] > a_{k_0+1} \geqslant 1,$$

donc

$$[a_{k_0}, \dots, a_n, \dots] = a_{k_0} + \frac{1}{[a_{k_0+1}, \dots]} < a_{k_0} + 1 \leqslant b_{k_0}.$$

Ainsi,

$$a_{k_0} < [a_{k_0}, \dots, a_n, \dots] < b_{k_0}.$$

On déduit de la croissance stricte de $F_{k_0-1} : t \mapsto [a_0, \dots, a_{k_0-1}](t)$, que

$$F_{k_0-1}\left(\frac{1}{a_{k_0}}\right) > F_{k_0-1}\left(\frac{1}{[a_{k_0}, \dots, a_n, \dots]}\right) > F_{k_0}\left(\frac{1}{b_{k_0}}\right),$$

c'est-à-dire, puisque F_{k_0-1} correspond aussi à $t \mapsto [b_0, \dots, b_{k_0-1}](t)$ (par définition de k_0),

$$[a_0, \dots, a_{k_0}] > [(a_n)] > [b_0, \dots, b_{k_0}],$$

La première inégalité est aussi vraie pour (b_n), donc

$$[b_0, \dots, b_{k_0}] > [(b_n)].$$

Ainsi, on a une inégalité stricte $[(a_n)] > [(b_n)]$, nous assurant que ces deux quantités ne sont pas égales. Si k_0 est pair, le raisonnement est le même en inversant tous les sens de variation, à condition toutefois que $k_0 \neq 0$. Si $k_0 = 0$, on obtient directement, du fait que comme ci-dessus $[a_1, \dots, a_n, \dots] > 1$,

$$a_0 < [a_0, \dots, a_n, \dots] < a_0 + 1 \leqslant b_0 < [b_0, \dots, b_n, \dots],$$

ce qui permet aussi de conclure.

Q7) Par définition $\alpha_k = a_k + \dfrac{1}{\alpha_{k+1}}$.

Q8) a) On montre d'abord que $\tilde{A}$ est bijective de $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{a/c\}$ (le cas $c = 0$ est particulièrement trivial puisqu'on a une application affine non constante car $a \neq 0$).

Pour cela, on peut au choix : • invoquer un argument d'analyse car pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$, $\tilde{A}'(t) = \dfrac{ad - bc}{(ct + d)^2}$.

Par exemple si $ad - bc > 0$, alors $\tilde{A}$ est strictement croissante sur chaque intervalle $]-\infty, -d/c[$, et $]-d/c, +\infty[$ et par continuité stmt monotonie et limites aux bornes, elle réalise une bijection de ces intervalles vers $]a/c, +\infty[$ et $]-\infty, a/c[$ respectivement.

• invoquer un argument plus algébrique : pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$, $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ équivaut à $x.(a - cy) = yd - b$ et comme $a - cy \neq 0$ ceci équivaut à $x = \dfrac{dy - b}{-cy + a}$ ce qui donne l'existence et l'unicité d'un antécédent de y et cet antécédent est dans $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$.

b) Sens $\Leftarrow$ facile : si on remplace $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$, alors on remplace $\dfrac{at + b}{ct + d}$ par $\dfrac{\lambda at + \lambda b}{\lambda ct + \lambda d}$ et le λ se simplifie pour redonner $\dfrac{at + b}{ct + d}$.

Sens $\Rightarrow$: à partir de l'égalité $(at+b)/(ct+d) = (a't+b')/(c't+d')$ pour tout t dans un ensemble infini, en chassant les dénominateurs, on a l'égalité des polynômes :

$$ac't^2 + (bc' + ad')t + bd' = a'ct^2 + (b'c + a'd)t + b'd$$

pour un ensemble infini de t donc

$$\begin{cases} ac' = a'c \\ bd' = b'd \\ bc' + ad' = b'c + a'd \end{cases}$$

La première équation, qui s'écrit encore $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}$ avec a ou c non nul puisque $ad - bc \neq 0$ donne : il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a' = \lambda a, c' = \lambda c$

De même la seconde équation donne un μ tel que $b = \mu b$ et $d' = \mu d.$

La dernière donne alors : $\lambda bc + \mu ad = \mu bc + \lambda ad$ donc $(\mu - \lambda)(ad - bc) = 0$ et donc $\lambda = \mu$ et cette constante ne peut pas être nulle car sinon l'une des matrices serait nulle.

c) Pas drôle à écrire mais sans difficulté.

d) Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des homographies. On vient de montrer que l'application $\Phi : (GL_2(\mathbb{R}), \times) \to (\mathcal{H}, \circ)$ est un morphisme (question c)).

Par définition des homographies, Φ est surjective, ce qui montre, par transport de propriété par un morphisme surjectif, que $(\mathcal{H}, \circ)$ est un groupe aussi.

En outre, on a vu que $\ker(\Phi)$ est formé des matrice de la forme λI ce qui suffit à résumer le b).

Q9) a) • Pour $n = 0$, par définition $\widetilde{H_0}(t) = \dfrac{a_0 t + 1}{t} = a_0 + \dfrac{1}{t} = [a_0, t]$.

Il faut bien penser que c'est cela qui a guidé la définition de H_0, en lisant l'égalité précédente de droite à gauche.

• Hypothèse de récurrence (H.R.) : supposons que pour un certain entier $n \geq 0$, on ait, pour tout $t > 0$, $\widetilde{H_n}(t) = [a_0, \ldots, a_n, t]$.

Soit $t > 0$.

Par définition de l'écriture des fractions continues, on a :

$$[a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}, t] = [a_0, \ldots, a_n, a_{n+1} + \frac{1}{t}].$$

En appliquant l'H.R. à la variable $a_{n+1} + \dfrac{1}{t}$, on en déduit que :

$[a_0,\ldots,a_n,a_{n+1},t] = \widetilde{H_n}(a_{n+1}+\dfrac{1}{t}) = \widetilde{H_n}(\widetilde{A_{n+1}}(t)) = \widetilde{H_n \times A_{n+1}}(t) \overset{def}{=} \widetilde{H_{n+1}}(t)$.

La réc. est établie. $\square$

b) Avec le a), en passant à la limite pour $t \to +\infty$, on a $\widetilde{H_n}(\infty) = [a_0,\ldots,a_n]$.

Or pour $\tilde{H}_n \ : t \mapsto \dfrac{P_n t + R_n}{Q_n t + S_n}$, on a $\widetilde{H_n}(\infty) = \dfrac{P_n}{Q_n}$.

Ainsi, on a bien montré que $[a_0,\ldots,a_n] = \dfrac{P_n}{Q_n}$.

c) La relation de récurrence matricielle $H_{n+1} = H_n \times A_n$ donne, en prenant le déterminant, comme $\det(A_n) = -1$ que $\det(H_{n+1}) = -\det(H_n)$

Comme $\det(H_0) = \det(A_0) = -1$, on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\det(H_n) = (-1)^{n+1}$.

Mais alors cela donne la relation de Bézout $P_n S_n - Q_n R_n = \pm 1$ et donc $P_n \wedge Q_n = 1$.

Par déf. le couple (p_n, q_n) correspondait aussi à l'écriture irréductible de $[a_0,\ldots,a_n]$ donc $(P_n, Q_n) = (p_n, q_n)$.

d) La relation matricielle $H_{n+1} = H_n \times A_{n+1}$ se traduit, entrée par entrée sur la matrice en :

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n a_{n+1} + R_n \\ R_{n+1} = P_n \\ Q_{n+1} = Q_n a_{n+1} + S_n \\ S_{n+1} = Q_n \end{cases}$$

En remplaçant à l'aide des équations des lignes 2 et 4, dans les lignes 1 et 3, et en décalant les indices ; on obtient bien :

$$\begin{cases} P_{n+1} = a_{n+1} P_n + P_{n-1} \\ Q_{n+1} = a_{n+1} Q_n + Q_{n-1} \end{cases}$$