Devoir surveillé 7 : solution

La fonction digamma pour exprimer une loi de probabilité

CCINP MP 2016 cf DS 4

Q 1) Cf Banque CCINP et cours du I3 : $\forall x > 0$, $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}t^{x-1}dt$, bien penser à séparer l'intervalle en $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ pour la domination.

Q 2) Cf cours du S1, la méthode la plus rapide est certainement le lien suite série, en posant $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$, alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n^2})$$

Par théorème de comparaison, $(u_{n+1} - u_n)$ est terme général de série (absolument) convergente et par lien suite/série la suite (u_n) converge.

Q 3) Avec la Q1), on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt = \Gamma'(1)$. Comme $\Gamma(1) = 1$, on a aussi :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt = \psi(1)$$

Mais avec la formule (†), $\psi(1) = -1 - \gamma + 1$ par télescopage, donc $\psi(1) = -\gamma$, au total :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt = -\gamma.$$

Q 4) La v.a. X suit la loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$. On a donc, pour tout $k \in \{1,\dots,n\}, P(X=k) = \frac{1}{n}$. Il s'ensuit $E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$.

Q 5) Soit $i \in [1,n]$. Si la i^e boule est sortie au premier tirage, alors l'urne contient, au moment du deuxième tirage, $i+1$ boules de numéro i, et une boule de numéro k pour tout $k \in [\![1,n]\!]\backslash\{i\}$. Puisque l'événement $(X=i)$ est de probabilité non nulle, l'énoncé se traduit sous la forme :

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2, P(Y=k \mid X=i) = \begin{cases} \frac{i+1}{n+i} & \text{si } k=i \\ \frac{1}{n+i} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fixons $k \in [1,n]$. La famille $((X=i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'évènements non négligeables, et la formule des probabilités totales donne donc

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \sum_{i=1}^{n} P(Y=k \mid X=i)P(X=i) \\ &= \frac{k+1}{n(n+k)} + \frac{1}{n}\sum_{i\in[\![1,n]\!]\backslash\{k\}} \frac{1}{n+i} \\ &= \frac{k}{n(n+k)} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} \end{aligned}$$

Par ailleurs, la formule (†) rappelée par l'énoncé, donne, par soustraction,

$$\psi(2n+1) - \psi(n+1) = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$$

et donc

$$P(Y=k) = \frac{1}{n}\left(\psi(2n+1) - \psi(n+1) + \frac{k}{n+k}\right)$$

Q 6) Par retour à la définition,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) \\ &= \frac{\psi(2n+1)-\psi(n+1)}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n(n+k)} \\ &= \frac{\psi(2n+1)-\psi(n+1)}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1-n}{2} + n(\psi(2n+1)-\psi(n+1)). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$E(Y) = \frac{3n+1}{2}(\psi(2n+1)-\psi(n+1)) + \frac{1-n}{2}.$$

Chaînes de Markov et matrices stochastiques

Mines 2017 - PSI

Q 7) $(S_k = i)_{1\le i\le 5}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(S_{k+1}=1) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1}=1 \mid S_k = i)\,\mathbb{P}(S_k=i)$$

Il reste à remarquer que les salles $2,3,4,5$ mènent toutes à 1 avec probabilité $\frac{1}{3}$ pour en déduire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(S_{k+1}=1) = \frac{1}{3}\sum_{i=2}^{5}\mathbb{P}(S_k=i)$$

Q 8) On peut procéder de même pour expliciter $\mathbb{P}(S_{k+1}=j)$ pour $j=2,3,4,5$ et obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{k+1}=2) &= \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k=1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k=3) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k=5) \\ \mathbb{P}(S_{k+1}=3) &= \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k=1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k=2) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k=4) \\ \mathbb{P}(S_{k+1}=4) &= \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k=1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k=3) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k=5) \\ \mathbb{P}(S_{k+1}=5) &= \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k=1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k=2) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k=4) \end{aligned}$$

En effet, en partant de la salle S_1 le rat a une chance sur 4 de partir dans chaque direction, donc $P(S_{k+1}=2|S_k=1)=1/4$. Ce qui se traduit matriciellement par

$$\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = BX_k \text{ avec } B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

On a bien la somme de chaque colonne qui fait 1 et les entrées positives, donc $B^\top$ est une matrice stochastique.

Q 9) En notant $U = (11111)^\top$, on a $B^\top U = U$ ce qui correspond, avec la positivité des coefficients, au fait que $B^\top$ est une matrice stochastique.

Q 10) Un calcul immédiat donne $BX_0 = X_0$ et, par récurrence immédiate, $X_k = B^k X_0 = X_0$ pour tout entier k. X_k donnant la loi de S_k, toutes les S_k ont même loi dans ce cas.

N.B. On sait que les s.e.v. propres de B et $B^\top$ pour chaque v.p. ont même dimension. Ici $B^\top$ est stochastique, et sa droite propre pour la v.p. est connue. Pour B la forme d'un tel vecteur propre doit être calculée.

Q 11) Si le rat est dans une pièce, il la quitte au temps suivant. Ainsi, $\mathbb{P}(S_0=1\cap S_1=1)=0$. Or $\mathbb{P}(S_0=1)\,\mathbb{P}(S_1=1) = \frac{1}{16} \ne 0$. Ainsi S_0 et S_1 ne sont pas indépendantes

Q 12) a) Soit $x \in \ker(u - I_E)$. On a $u(x) = x$ et par récurrence immédiate, $u^k(x) = x$ pour tout k. Ainsi, $r_k(x) = x$ et

$$\forall x \in \ker(u - I_E), r_k(x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x$$

b) Soit $x \in \operatorname{Im}(u - I_E)$. Il existe y tel que $x = (u - I_E)(y)$ et donc $x = u(y) - y$. Ainsi $u^l(x) = u^{l+1}(x) - u^l(x)$ et (télescopage)

$$r_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\left(u^{l+1}(x) - u^l(x)\right) = \frac{1}{k}\left(u^k(x) - x\right)$$

On en déduit que $\|r_k(x)\| \le \frac{1}{k}\left(\left\|u^k(x)\right\| + \|x\|\right)$. Or, u n'augmentant pas les normes, $\left\|u^k(x)\right\| \le \|x\|$ et donc notre majorant est de limite nulle. Ceci montre que

$$\forall x \in \operatorname{Im}(u - I_E), r_k(x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0_E$$

c) Par théorème du rang, on a les bonnes dimensions. De plus, si $x \in \operatorname{Im}(u - I_E) \cap \ker(u - I_E)$, $(r_k(x))$ est simultanément de limite x et 0_E et donc $x = 0_E$ par unicité de la limite. L'intersection est donc réduite à 0_E et la somme est directe. Finalement

$$E = \ker(u - I_E) \oplus \operatorname{Im}(u - I_E)$$

d) Soit $x \in E$. Il existe $y \in \ker(u - I_E)$ et $z \in \operatorname{Im}(u - I_E)$ tels que $x = y + z$. On a alors $r^k(x) = r^k(y) + r^k(z) \to y$.
Or l'application qui à x associe sa composante y comme ci-dessus est la projection sur $\ker(u - I_E)$ de direction $\operatorname{Im}(u - I_E)$.

$$\forall x \in E, r_k(x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} p(x) \text{ avec } p \text{ projection sur } \ker(u - I_E) \text{ de direction } \operatorname{Im}(u - I_E)$$

Q 13) **La question semble triviale, il y a quand même une petite chose à vérifier.**
La question précédente donne un résultat de *convergence simple*. Dans un espace fonctionnel usuel la convergence simple ne vient pas forcément d'une norme sur l'espace des fonctions. Ici, on veut montrer la convergence dans l'espace des endomorphimes ou c'est équivalent, des matrices, à partir de la convergence simple.
Pour parler de convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on doit munir cet espace d'une norme. Et comme l'espace est de dimension finie, le choix de la norme est indifférent (les normes sont équivalentes en dimension finie). La question précédente montre que

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, R_k X \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} PX \quad (1)$$

où P est la matrice (dans la base canonique) du projecteur sur $\ker(A - I_n)$ de direction $\operatorname{Im}(A - I_n)$ (espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$).
On veut en déduire que :

$$R_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P \quad (2)$$

dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Appliquons (1) aux éléments E_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$: on sait alors que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \|R_k E_i - PE_i\| \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

Comme tous les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$, on peut choisir de travailler avec la norme infinie associée à la base canonique. La propriété $\|R_k E_i - PE_i\| \underset{k\to+\infty}{\to} 0$ signifie alors que chaque suite des coefficients de $R_k E_i$ converge vers le coefficient associé de PE_i. Ceci signifie donc que chaque suite coefficient de R_k converge vers le coefficient de P associé. Donc

$$R_k \underset{k\to+\infty}{\to} P$$

au sens de la norme infinie. Enfin, P est la matrice d'une projection et $P^2 = P$.

Q 14) a) Posons $V = AU$. On a

$$\forall i, \quad V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} U_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$$

On en déduit que

$$(1) \text{ équivaut à } AU = U$$

b) Soient A, B stochastiques. Par les formules de produit, $C = AB$ est à coefficients positifs (chaque $c_{i,j}$ est somme et produit de termes ≥ 0). En outre $CU = ABU = AU = U$ avec la question précédente. Cette même question indique que C vérifie (4) et est donc stochastique.

$$\mathcal{E} \text{ est stable par multiplication}$$

c) (i) Soit (A_k) une suite convergente de matrices stochastiques et A sa limite. Chaque coefficient de A est limite de la suite correspondante des coefficients de A_k et est positif comme limite de tels termes. De plus, $\forall k, A_k U = U$ donne par passage à la limite (continuité du produit matriciel) : $AU = U$. Ainsi A est stochastique. Donc $\mathcal{E}$ est fermé.

(ii) Soient A, B stochastiques et $\lambda \in [0,1]$. Posons $M = \lambda A + (1-\lambda)B$. La positivité des coefficients de A et B entraîne celle des coefficients de M. De plus $MU = \lambda AU + (1-\lambda)BU = \lambda U + (1-\lambda)U = U$ ce qui donne (4) pour M qui est donc stochastique. Donc $\mathcal{E}$ est convexe .

Q 15) Posons $Y = AX = (y_i)_{1\leq i\leq n}$. On a

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \ |y_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \cdot |x_j| \leq \|X\|_\infty \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \|X\|_\infty$$

Ceci étant vrai pour tout i, on a

$$\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty \text{ pour tout } X \in \mathbb{R}^n$$

Q 16) On sait déjà que

$$\mathrm{Vect}(U) \subset \ker(A - I_n) \quad (*)$$

car A est stochastique

Si $AX = X$ alors par récurrence $A^k X = X$ pour tout k et en particulier $A^p X = X$. Autrement dit :

$$\ker(A - I_n) \subset \ker(A^p - I_n) \quad (**)$$

Donc avec $(*)$ et $(**)$, on a :

$$\mathrm{Vect}(U) \subset \ker(A^p - I_n)$$

Mais par le résultat du D.S.2. rappelé, pour la matrice stochastique stmt postive A^p, on a l'égalité des dimensions dans l'inclusion précédente donc :

$$\ker(A^p - I_n) = \mathrm{Vect}(U) \quad (***)$$

Avec$(*), (**), (***)$ on a bien :

$$\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$$

Q 17) Par produit les A^l sont toutes stochastiques (question 14 b)). R_k est une combinaison convexe de matrices stochastique donc par Q14 c),

$$R_k \text{ est stochastique pour tout } k$$

Q 18) La question 14 montre que (R_k) est convergente de limite P telle que $P^2 = P$. De plus, les questions 17 et 14 (caractère fermé) montrent que P est stochastique. La Q13 a montré que P est la matrice de la projection sur $\ker(A - I_n)$ de direction $\mathrm{Im}(A - I_n)$. On a donc $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}(U)$ et P est de rang 1.

$$R_k \to P, P \in \mathcal{E}, \mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}(U)$$

Q 19) Comme P est de rang 1 et que $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}(U)$ (vecteur propre), toutes les colonnes de P sont ainsi multiples de U et il existe λ_i telle que la colonne i s'écrive $\lambda_i U$. En posant $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (matrice ligne) on a alors $P = UL$. Comme toutes les coordonnées de U valent 1, toutes les lignes de P valent L. Comme P est stochastique, L l'est aussi.

$$P = UL \text{ avec } L \text{ matrice ligne stochastique}$$

Q 20) **(M1)** On sait que P est la matrice du projecteur sur $\ker(A - I_n)$ parallélement à $\mathrm{Im}(A - I_n)$. Donc $\mathrm{Im}\,(A - I_n) = \ker(P)$ et donc $P\,(A - I_n) = 0$ donc $PA = P$.

(M2) Remarquons que

$$R_k A = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} A^l = \frac{1}{k}\left((k+1)R_{k+1} - I_n\right) = \frac{k+1}{k}R_{k+1} - \frac{1}{k}I_n$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient

$$PA = P$$

Pour le « en déduire » :

• P est une matrice dont toutes les lignes sont égale à L. PA est ainsi une matrice dont toutes les lignes sont LA. L'égalité $PA = P$ donne ainsi $LA = L$.

• Si Y est une matrice ligne, $YA = Y$ s'écrit aussi $A^\top Y^\top = Y^\top$ ou encore $(A^\top - I_n)\,Y^\top = 0$. Or, avec la question 16, $A - I_n$ est de rang $n - 1$ (par théorème du rang) et il en est de même de $(A - I_n)^\top = A^\top - I_n$. Le noyau de $A^\top - I_n$ est ainsi de dimension 1 . Il contient la matrice $L^\top$ qui est non nulle (car sinon $P = 0$). Ainsi, les matrices ligne Y vérifiant $YA = Y$ sont les multiples de L. La somme des coefficients de λL ne valant 1 que si $\lambda = 1$, on a finalement L est la seule ligne stochastique telle que $LA = L$

N.B. Pour revenir au rat, on va s'intéresser bien sûr aux colonnes stochastiques invariantes par $B = A^\top$ comme celle qui était donnée à la Q10.

Q 21) On a vu aux Q 19 et 20 que $P = UL$ où L est l'unique ligne stochastique telle que $LA = L$, c'est-à-dire où $L^\top$ a des coefficients positifs de somme 1 et vérifie $A^\top L^\top = L^\top$, c'est-à-dire où $L^\top$ est vecteur propre de B associé à la valeur propre 1.

Or comme donné par le sujet à la Q10, $(4, 3, 3, 3, 3)^\top$ est un tel vecteur propre et donc $L = \frac{1}{16}(4, 3, 3, 3, 3)$. Finalement,

$$P = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Q 22) Supposons que S_0 suive une loi vérifiant la condition de l'énoncé. Avec la notation de l'énoncé avant la Q6, on a alors $X_0 = BX_0$ et, en transposant, $X_0^\top A = X_0^\top$. Comme $X_0^\top$ est stochastique, la question 20 montre que

$$X_0^\top = L$$

avec L. trouvé à la question précédente, qui convient comme on le sait depuis la Q10.

Le seul cas où les tous les S_k ont la même loi est donc donné par la distribution initiale $X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}$

Partie III

Q 23) La variable aléatoire Y_n prend les valeurs 1 et 0 avec la même probabilité $\frac{1}{2}$ Elle suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. La variable aléatoire Z_n est donc une somme de n variables aléatoires de Bernoullj indépendantes, de paramètre $1/2$. Par conséquent, la variable aléatoire Z_n suit la loi binomiale de paramètres $\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

Q 24) Soit $\omega \in \Omega$. Soit p le cardinal de l'ensemble $\{j \in [\![1;n]\!], X_j(\omega) = 1\}$.
L'ensemble $\{j \in [\![1;n]\!], X_j(\omega) = -1\}$ est alors de cardinal $n-p$. Il s'ensuit que

$$S_n(\omega) = p \times 1 + (n-p) \times (-1) = 2p - n$$

Or n et $2p-n$ sont de même parité. La variable aléatoire S_n est donc de même parité que n avec probabilité 1 , c'est-à-dire que si k et n ne sont pas de même parité, alors $\mathbb{P}(S_n = k) = 0$.

Q 25) Remarquons d'abord que $X_n = 2Y_n - 1$, d'où

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} (2Y_j - 1) = 2\sum_{j=1}^{n} Y_j - n = 2Z_n - n$$

Supposons que k et n soient de même parité. On a alors

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}(2Z_n - n = k) = \mathbb{P}\left(Z_n = \frac{n+k}{2}\right)$$

et $(n+k)/2$ est bien entier puisque n et k ont la même parité, et dans $[\![0;n]\!]$ puisque $k \in [\![-n;n]\!]$. Comme Z_n suit la loi binomiale de paramètres ($n, 1/2$), on conclut que

$$\text{Si } n \text{ et } k \text{ sont de même parité, } \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}}\frac{1}{2^n}$$

Q 26) Soient $\delta > 0, \tau > 0$. Calculons

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\left(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}\right) &= \delta^2 \mathbb{V}\left(\ S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}\right) \\ &= \delta^2 \mathbb{V}\left(2Z_{\lfloor 1/\tau \rfloor} - n\right) \\ &= 4\delta^2 \mathbb{V}\left(Z_{\lfloor 1/\tau \rfloor}\right)\end{aligned}$$

d'où, connaissant la variance de la loi binomiale $\mathcal{B}(\lfloor 1/\tau \rfloor, \dfrac{1}{2})$

$$\mathbb{V}\left(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}\right) = 4\delta^2 \lfloor 1/\tau \rfloor \frac{1}{4} = \delta^2 \lfloor 1/\tau \rfloor$$

Q 27) Par définition de la partie entière :

$$\begin{gathered}\frac{1}{\tau} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{\tau} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{\tau} \\ 1 - \tau < \tau \left\lfloor \frac{1}{\tau} \right\rfloor \leqslant 1\end{gathered}$$

Il s'ensuit, par le théorème d'encadrement, que

$$\begin{gathered}\tau \left\lfloor \frac{1}{\tau} \right\rfloor \underset{\tau \to 0^+}{\longrightarrow} 1 \\ \left\lfloor \frac{1}{\tau} \right\rfloor \underset{\tau \to 0^+}{\sim} \frac{1}{\tau}\end{gathered}$$

On en déduit que

$$\mathbb{V}\left(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}\right) = \delta^2 \left\lfloor \frac{1}{\tau} \right\rfloor \underset{\tau \to 0^+}{\sim} \frac{\delta^2}{\tau}$$

Q 28) Soient $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}$. La famille $\{[\mathrm{S}_n = j], j \in \mathbb{Z}\}$ forme un système complet d'événements, on a donc d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{S}_{n+1} = k) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(\mathrm{S}_{n+1} = k \mid \mathrm{S}_n = j)\,\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = j) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(\mathrm{S}_n + \mathrm{X}_{n+1} = k \mid \mathrm{S}_n = j)\,\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = j) \\
\mathbb{P}(\mathrm{S}_{n+1} = k) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k - j)\,\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = j)
\end{aligned}$$

où on a utilisé, pour obtenir la dernière égalité, le fait que X_{n+1} et S_n sont indépendantes. Or pour tout $j \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k - j) = 0$ si $j \notin \{k-1, k+1\}$, et cette probabilité vaut $1/2$ si $j = k - 1$ ou $j = k + 1$. Par conséquent,

$$p_{n+1}(k) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k - 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k + 1) = \frac{p_n(k-1) + p_n(k+1)}{2}$$

et en soustrayant $p_n(k)$ de chaque côté de l'égalité, puis en divisant par τ et en multipliant le membre de droite par $\delta^2/\delta^2 = 1$, cela équivaut à

$$\frac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau} = \frac{\delta^2}{2\tau}\frac{p_n(k+1) - 2p_n(k) + p_n(k-1)}{\delta^2}$$