Banque CCINP Ex. 33,41, 52, 56, 57, 58

Continuité, différentiabilité, caractère $\mathcal{C}^1$ de fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ « concrètes »

Exercice 1. On pose $f(x,y) = \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2 + x^8}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

En considérant $f(x,x^2)$ justifier que f n'est pas continue en 0. Montrer néanmoins que f admet une dérivée suivant tout vecteur en 0.

Exercice 2 (Vérification du caractère $\mathcal{C}^1$)**.** Soit $f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que la fonction f ainsi définie est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, ce qui signifie que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (Comment montrer qu'une fonction n'est pas $\mathcal{C}^1$)**.** On pose $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? De classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4 (Pour bosser mais pas trop)**.** Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \exp(1/(x^2+y^2-1)) & \text{si } x^2+y^2 < 1 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que la fonction f suivante est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et donner l'allure de son graphe.

Calcul de différentielles sans passer par les dérivées partielles

Exercice 5 (Exemples traités en cours ou proches)**.**

a) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Expliciter $df(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Soit E un espace vectoriel euclidien, et $\|\ \|$ sa norme euclidienne. Montrer que cette application norme de $E \smallsetminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^+$ est différentiable et calculer sa différentielle de deux manières : **(M1)** sans coordonnées, en reliant la norme au produit scalaire, et en utilisant la linéarité du p.s **(M2)**

c) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et (en identifiant $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$), $f : x \mapsto (Ax|x)$. Calculer $df(x)$ et $\nabla f(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}^n$. (avec les deux méthodes du b)).

d) Calculer le gradient de l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (pour le p.s can.) et en déduire la différentielle du déterminant.

Exercice 6. a) Dans $E = M_n(\mathbb{K})$ pour $f : M \to M^2$, calculer $df(A).H$ pour tout $(A,H) \in E^2$.

b) Généralisation du a) pour $f : M \to M^p$?

Exercice 7. Soient $(E, \langle\rangle)$ un espace euclidien réel et F un sous-espace vectoriel de E.

a) Pour tout $x \in E$, exprimer la projection orthogonale de x sur F à l'aide d'une base orthonormale de F. Justifier la formule.

b) On définit la fonction $d_F : E\backslash F \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x,F)$. Montrer que d_F est différentiable, et calculer sa différentielle.

Utilisation de la dérivation le long d'une courbe (souvent une droite)

Exercice 8 (Cas de l'inversion de matrice)**.** a) Justifier à l'aide du cours que $f : M \in GL_n(\mathbb{K}) \mapsto M^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

b) A l'aide de l'exercice fait sur la planche D_1 pour les applications $t \mapsto A(t)^{-1}$, donner une formule pour $df(A).H$ pour tout $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $H \in M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $\overline{x} \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ continue sur U, différentiable sur $U \smallsetminus \{\overline{x}\}$.

On suppose que $\forall x \ \in U \smallsetminus \{\overline{x}\},\ df(x).(x-\overline{x}) \geq 0.$.

Montrer que f admet un minimum local en $\overline{x}$.

Indication – Pour chaque point x d'une boule $B(\overline{x}, r) \subset U$, on considérera $t \mapsto f(tx + (1-t)\overline{x})$.

Exercice 10 (Fonctions convexes : caractérisations par la différentielle)**.** Soit Ω un ouvert convexe de $E = \mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.

On dit que f est convexe sur Ω ssi $\forall\,(a,b) \in \Omega^2$, $\forall\, t \in [0,1]$, $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$.

a) Fonctions auxiliaires d'une variable réelle :

Pour tout $a \in \Omega$ et tout $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $I_{a,x} = \{t \in\ \mathbb{R},\, a + tx \in \Omega\}$.

On pose $\varphi_{a,x} : I_{a,x} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(a + tx)$.

Montrer que f est convexe sur Ω si, et seulement si, toutes les fonctions $\varphi_{a,x}$ pour $a \in \Omega$ et $x \in E$ sont convexes.

b) On suppose que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe sur Ω,

(ii) $\forall\,(a,b) \in \Omega^2$, $df(b)(b-a) \geq df(a)(b-a)$,

(iii) $\forall\,(a,b) \in \Omega^2$, $f(b) - f(a) \geq df(a)(b-a)$.

On pourra admettre l'implication (iii)⇒ (i)

c) On suppose encore que f est différentiable et convexe sur Ω. Soit $a \in \Omega$ un point critique de f i.e. tel que $df(a) = 0$. Montrer que $f(a)$ réalise le minimum global de f sur Ω.

Exercice 11 (Exemple fondamental de fonctions convexes : les formes quadratiques positives)**.** Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On identifie $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$ et on note $A.x \in \mathbb{R}^n$ l'image du vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ par la matrice A.

On considère la *forme quadratique* $f :\ x \mapsto (Ax|x)$ où $(\ |\ )$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que si A est une matrice symétrique *positive* alors f est une fonction convexe.

b) Montrer que si A est une matrice symétrique *définie positive* alors f est une fonction strictement convexe.

Etude d'extrema locaux et globaux sur un ouvert

Exercice 12. Soit $U = (\mathbb{R}^{+*})^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$.

a) Etudier les extrema locaux de f dans U en considérant $g(x,y) = \ln(f(x,y))$ ce qui simplifie les calculs.

b) Etudier $f(x,y)$ quand $\|(x,y)\| \to +\infty$ et quand $(x,y) \to \partial U$ et en déduire les extrema globaux de f.

Exercice 13. Étudier les extrema locaux de :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto e^{x \sin y}.$$

Exercice 14. Déterminer les extremums relatifs (i.e. locaux) et absolus (i.e. globaux) de

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

Indication – Pour l'étude en $(0,0)$, on n'a pas de théorème mais on peut s'en tirer avec une idée simple.

Exercice 15 (Cas d'une fonction strictement convexe coercive)**.** Soit E un e.v.n. de dim. finie et C un sous-ensemble convexe de E.

a) Soit $f\ : C\ \to \mathbb{R}$. On dit que f est *strictement convexe* sur C ssi pour tout $(a,b) \in C^2$ avec $a \neq b$ et pour tout $t \in]0,1[$, $f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b)$. On suppose donc au a) et b) que f est stmt convexe sur C.

Montrer que si f admet minimum dans C alors celui-ci est atteint en un unique point.

b) On suppose que C est un convexe fermé et que $f\ : C\ \to \mathbb{R}$ est coercive sur C ce qui signifie que si C est non borné $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que f admet un unique minimum dans C.

c) Exemple concret : on identifie $\mathbb{R}^n$ à $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et on considère $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{2}(Ax|x) + (b|x) + c$ avec A une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.

Montrer que f admet un minimum dans $\mathbb{R}^n$, atteint en un unique point $\overline{x}$.