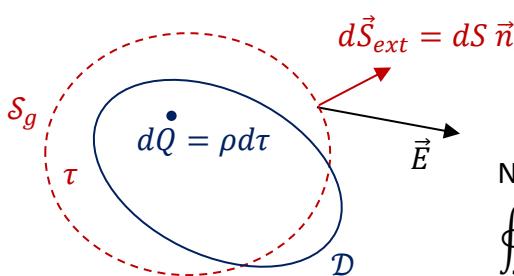


1) Soit O le centre de l'atome et M un point de l'espace. Tous les plans contenant la droite (OM) sont des **plans de symétrie pour la distribution** donc des plans de symétrie pour le champ électrique \vec{E} . Celui-ci appartient à tous ces plans donc $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u}_r$.

2) La distribution est **invariante par rotation** selon φ et θ donc la norme de \vec{E} ne dépend que de r .

3) Soit une distribution de charge \mathcal{D} . Le flux sortant de \vec{E} à travers une surface fermée géométrique quelconque (surface de Gauss \mathcal{S}_g) ne dépend que de la charge contenue dans le volume enveloppé par \mathcal{S}_g .



$$\iint_{\mathcal{S}_g} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\tau \text{ enveloppé par } \mathcal{S}_g} \rho d\tau = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Nous choisissons pour \mathcal{S}_g , une sphère de centre O et de rayon r :

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = E(r) 4\pi r^2 \quad \rho = \frac{3Q}{4\pi a_0^3} \quad Q_{int} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3} = \frac{Q r^3}{a_0^3}$$

$$\rightarrow \vec{E}(M) = \frac{Qr}{4\pi \epsilon_0 a_0^3} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a_0^3} \vec{r}$$

4) Sauf en O , le poids ($9 \cdot 10^{-30} N$) est négligeable devant la force électrique ($2 \cdot 10^{-9} N$ dès $r = \frac{a_0}{10}$).

5) On reconnaît un mouvement à **force centrale**, la seule force étant la force électrique. Le T.M.C. appliqué en O à l'électron M indique que $\vec{OM} \wedge m\vec{v}(M) = \vec{cste} \rightarrow \vec{OM} \perp \vec{cste} \rightarrow$ Le mouvement est plan.

6) D'après la 2^{ème} loi de Newton, $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{q_e^2}{4\pi \epsilon_0 a_0^3} \vec{r} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{q_e}{4\pi \epsilon_0 m a_0^3}}$

7) Tant que la vitesse initiale n'est pas dirigée vers O , la trajectoire est **elliptique**. Si de plus la vitesse initiale est perpendiculaire à \vec{r} , alors l'ellipse admet pour grand axe ou petit axe, la droite (OM) initiale. Enfin, si de surcroit $v_0 = r_0 \omega_0$, la trajectoire est circulaire.

[La solution générale est $\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \\ y(t) = C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t) \end{cases}$. En posant $x(0) = r_0$ et $y(0) = 0$, on obtient

$$A = r_0, \quad B \omega_0 = v_{0x}, \quad C = 0, \quad D \omega_0 = v_{0y} \rightarrow \begin{cases} x(t) = r_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_{0x}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ y(t) = \frac{v_{0y}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \end{cases} \quad \text{Ellipse} \quad \text{Diagram of an ellipse centered at the origin.}$$

Si de plus $v_{0x} = 0$, $\begin{cases} x(t) = r_0 \cos(\omega_0 t) \\ y(t) = \frac{v_{0y}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \end{cases}$ Ellipse Si de surcroit $v_{0y} = r_0 \omega_0$, on a un cercle.

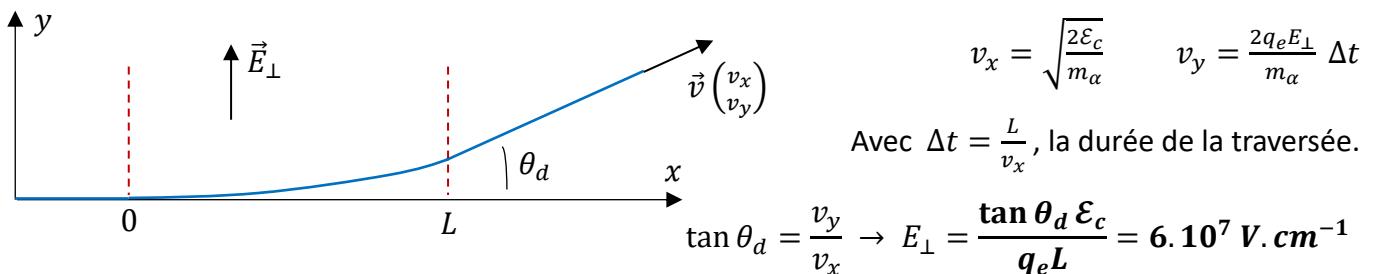
Enfin, si $v_{0y} = 0$, $y(t) = 0 \forall t$, la trajectoire est rectiligne.]

8) La force de rappel étant de la forme $-m\omega_0^2 \vec{r}$, l'énergie potentielle s'écrit $\mathcal{E}_p = \frac{m}{2} \omega_0^2 r^2$.

Le système étant **conservatif**, $\mathcal{E}_m = \frac{m}{2} v_0^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 r_0^2 = \frac{m}{2} v^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 r^2 = \frac{m}{2} \omega_0^2 r_{max}^2$ car alors $v = v_{min} = 0$. On conclut par $r_{max}^2 < a_0^2 \Leftrightarrow v_0^2 < \omega_0^2 (a_{max}^2 - r_0^2)$

9) $f = \frac{q_e}{2\pi \sqrt{4\pi \epsilon_0 m a_0^3}} = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = 0,12 \mu\text{m}$ Rayonnement **ultraviolet**.

10) La déviation maximale sera étudiée sous l'hypothèse d'un champ électrique transverse uniforme.



11) $F_y = 2q_e \vec{E} \cdot \vec{u}_y = \frac{2Zq_e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} \vec{r} \cdot \vec{u}_y = \frac{2Z e^2}{a_0^3} b$ Valeur **constante** au cours de la traversée de durée $\Delta t'$.

12) D'après la 2^{ème} loi de Newton, on en déduit que $\Delta p_y = \frac{2Z e^2}{a_0^3} b \Delta t'$ avec $\Delta t' = \frac{2\sqrt{a_0^2 - b^2}}{v_0}$. La fonction $f(b) = b\sqrt{a_0^2 - b^2}$ est maximale pour $b = \frac{a_0}{\sqrt{2}}$ et vaut alors $\frac{a_0^2}{2}$. Finalement, $\Delta p_m = \frac{2Z e^2}{a_0 v_0}$.

13) Comme en Q10, $\delta\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\Delta p_m}{m_\alpha v_0} = \frac{\Delta p_m v_0}{2\epsilon_c} = \frac{Z e^2}{a_0 \epsilon_c} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$

14) Avec $N \sim 10^4 \rightarrow \Delta\theta \sim 2 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \sim 1^\circ$ C'est insuffisant, le modèle de Thomson est à revoir.

15-16) Loin du noyau, la particule α a pour énergie mécanique son énergie cinétique initiale \mathcal{E}_c . Au plus près du noyau en $r = r_0 > r_{\text{noyau}}$, la particule α a pour énergie mécanique son énergie potentielle $\frac{2Ze^2}{r_0}$.

Par conservation de l'énergie mécanique, $\mathcal{E}_c = \frac{2Ze^2}{r_0} \rightarrow r_{\text{noyau}} < r_0 = \frac{2Ze^2}{\mathcal{E}_c}$.

La plus grande énergie cinétique nous permet de calculer le plus petit des majorants :

$r_{\text{noyau}} < 5,5 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ Le modèle de Thomson est mort. Vive le modèle de Rutherford !

17-18) $\vec{B}(M) = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}(M)}{c} = q \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{a}_\perp}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \rightarrow \vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M) \wedge \vec{B}(M)}{\mu_0} = \frac{\vec{a}_\perp \wedge (\vec{u}_r \wedge \vec{a}_\perp)}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} = \frac{q^2 \|\vec{a}_\perp\|^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \vec{u}_r$

Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface est la puissance rayonnée à travers cette surface.

19) Attention ! L'énoncé passe sous silence la variable temps alors qu'elle est omniprésente. Notamment, l'axe Oz et donc l'angle θ sont définis par rapport à la direction de l'accélération $\vec{a}(t)$ à l'instant t .

$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{q^2 a^2(t) \sin^2 \theta(t)}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \vec{u}_r$ Avec $a(t)$, la norme de l'accélération à l'instant t .

$$P(t) = \iint_0^{\pi} \iint_0^{2\pi} \|\vec{\Pi}(M, t)\| r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{q^2 a^2(t)}{8\pi\epsilon_0 c^3} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{q^2 a^2(t)}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

20) La 2^{ème} loi de Newton appliquée à l'électron indique que $-m \frac{v^2}{R} \vec{u}_r = -\frac{e^2}{R^2} \vec{u}_r$.

On en déduit que $a(t) = a = \frac{e^2}{mR^2}$ et d'autre part que $\mathcal{E}_c = \frac{m}{2} v^2 = \frac{e^2}{2R} = -\frac{\mathcal{E}_p}{2} \rightarrow \mathcal{E}_m = -\mathcal{E}_c = -\frac{e^2}{2R}$

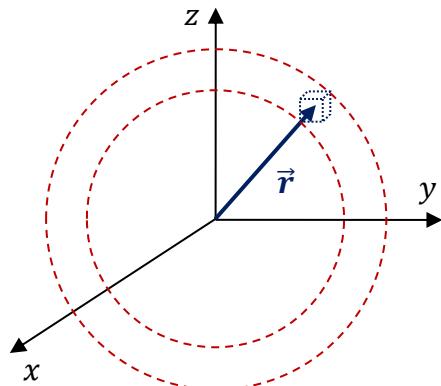
21-22) $P = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} = \frac{2e^6}{3m^2 c^3 R^4}$ Puis, grâce à la conservation de l'énergie, $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = -P \rightarrow \frac{dR}{dt} = -\frac{4e^4}{3m^2 c^3 R^2}$

[On retrouve ici la démarche classique vue dans l'exercice 1.6 du TD Mécanique en référentiel galiléen : On envisage une lente diminution du rayon tout en considérant que la relation $\mathcal{E}_m = -\mathcal{E}_c$ reste vraie.]

23-24) $R^3(t) - a_0^3 = -\frac{4e^4}{m^2 c^3} t \rightarrow \tau \sim \frac{m^2 c^3 a_0^3}{4e^4} \sim 0,1 \text{ ns}$ L'atome classique est mort. Vive l'atome quantique !

25-26) Le module au carré de la fonction d'onde est la densité volumique de probabilité de présence.

$d\mathcal{P}(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})|^2 dx dy dz$ représente la probabilité pour l'électron d'être en \vec{r} à dx , dy et dz près.



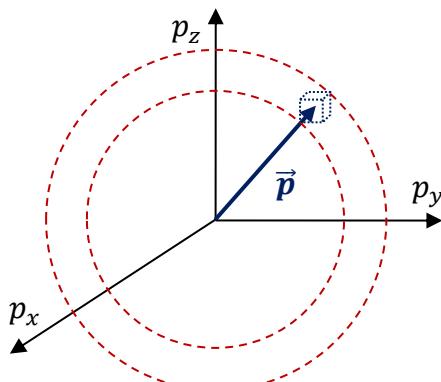
L'isotropie ($\psi(\vec{r}) = \psi(r)$) nous permet d'affirmer que la probabilité pour l'électron d'être à la distance r à dr près est $d\mathcal{P}(r) = |\psi(r)|^2 4\pi r^2 dr$.

$$\int_0^{r_0} |\psi(r)|^2 4\pi r^2 dr = 1 \rightarrow |A| = \sqrt{\frac{3}{4\pi r_0^3}}$$

Toujours par isotropie, $\langle \vec{r} \rangle = \vec{0}$.

$$\langle \|\vec{r}\|^2 \rangle = \int_0^{r_0} r^2 d\mathcal{P}(r) = \int_0^{r_0} |A|^2 4\pi r^4 dr = \frac{3}{5} r_0^2 \quad \Delta r = \sqrt{\frac{3}{5}} r_0$$

27-29) Par analogie, dans l'espace des impulsions, $|\chi(\vec{p})|^2 dp_x dp_y dp_z$ représente la probabilité pour que \vec{p} pointe dans le "cube" élémentaire centré en (p_x, p_y, p_z) , c'est-à-dire la probabilité pour l'électron d'avoir une quantité de mouvement \vec{p} à dp_x , dp_y et dp_z près. De même, $d\mathcal{P}(p) = |\chi(p)|^2 4\pi p^2 dp$.



[Nous sommes ici très proches des préoccupations rencontrées lors de la résolution de l'exercice 1 du TD Thermodynamique statistique.]

$$\text{Ainsi, } |B| = \sqrt{\frac{3}{4\pi p_0^3}} \text{ et } \Delta p = \sqrt{\frac{3}{5}} p_0 \text{ car là encore, par isotropie, } \langle \vec{p} \rangle = \vec{0}.$$

On a donc $\Delta r \Delta p = \frac{3}{5} r_0 p_0$.

Or d'après l'inégalité d'Heisenberg, $\Delta x \Delta p_x = \Delta y \Delta p_y = \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$.

Dans l'état fondamental, on a bien $r_0 p_0 \sim \hbar$.

$$30-31) \quad \mathcal{E}_p(r) = -\frac{e^2}{r} \rightarrow \langle \mathcal{E}_p \rangle = \int_0^{r_0} \mathcal{E}_p(r) d\mathcal{P}(r) = -4\pi A^2 e^2 \int_0^{r_0} r dr = -\frac{3e^2}{2r_0}$$

$$32-33) \quad \mathcal{E}_c(p) = \frac{p^2}{2m} \rightarrow \langle \mathcal{E}_c \rangle = \int_0^{r_0} \mathcal{E}_c(p) d\mathcal{P}(p) = 4\pi \frac{B^2}{2m} \int_0^{r_0} p^4 dp = \frac{3p_0^2}{10m} \rightarrow \langle \mathcal{E}_m \rangle = \frac{3p_0^2}{10m} - \frac{3e^2}{2r_0} = \frac{5\hbar^2}{6mr_0^2} - \frac{3e^2}{2r_0}$$

$$34-35) \quad \text{Energie minimale pour } r_0 = a_0 = \frac{10\hbar^2}{9me^2} \sim \frac{\hbar^2}{me^2} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad \text{Le modèle donne enfin satisfaction !}$$

$$36) \quad m_{PcH_2} = 8,54 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$$

37) Nous retrouvons la même situation qu'en Q10, à savoir une vitesse horizontale v et une vitesse verticale $-gt$ donc une déviation verticale $-\frac{g}{2} t^2$. En $t = \frac{D}{v}$, la déviation h est bien égale à $-\frac{g}{2} \left(\frac{D}{v}\right)^2$.

Le flux reçu Φ_r est le produit de s_r avec la densité surfacique de flux émis à la distance d , c'est-à-dire $\frac{\Phi_e}{2\pi d^2}$.

38) Si $h \in [-240 ; -160] \mu\text{m} \rightarrow v \in [0,14 ; 0,17] \text{ km.s}^{-1}$ En supposant la loi de distribution uniforme (ce qui ne semble pas être le cas), $v_0 = 0,15 \text{ km.s}^{-1}$ et $\Delta v = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{2\sqrt{3}} = 8 \text{ m.s}^{-1}$ (Ecart-type)

39) D'après la relation de de Broglie, $\lambda_B = \frac{\hbar}{mv} = 5,1 \text{ pm}$ pour la vitesse moyenne v_0 .

40) On reconnaît la relation des réseaux : La différence de marche δ entre deux ondes diffractées par deux fentes consécutives dans la même direction θ est égale à $a \sin \theta$. Les interférences sont constructives si et seulement si δ est un multiple de $\lambda_B \rightarrow a \sin \theta_k = k\lambda_B$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

41-42) Tant que $\theta \ll 1$, c'est le cas ici, $\sin \theta_k \sim \theta_k \sim X_k/L_2$ avec X_k , l'abscisse repérant les franges.

Par définition, $i = X_{k+1} - X_k = \frac{\lambda_B L_2}{a} = 29 \mu\text{m}$ Résultat tout à fait conforme à l'expérience.

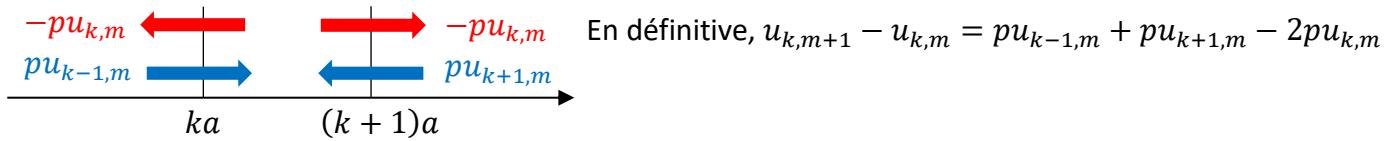
Si on considère $\Delta\nu \ll \nu_0$, $\Delta i = i \frac{\Delta\lambda_B}{\lambda_B} = i \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = 1,5 \mu\text{m}$ Là encore, l'expérience semble satisfaisante.

[Sur la figure 3 droite, on constate bien que l'interfrange augmente avec la déflexion. En effet, les particules les plus déviées sont les plus lentes donc celles associées aux longueurs d'ondes les plus grandes.

Dans ce problème, on néglige l'augmentation de la vitesse par le biais de la pesanteur. La longueur d'onde de de Broglie est considérée constante et ainsi, la condition d'interférences constructives s'écrit $\delta_k = k\lambda_B$. Ce qui n'est pas le cas du sujet CCINP ph 2024 (!) dans lequel est étudiée une expérience d'interférences entre particules accélérées par la pesanteur. La longueur d'onde variant au cours du temps, la condition d'interférences constructives comme on la connaît ($\Delta_k\Phi = 2\pi k$ ou $\delta_k = k\lambda_B$) n'est plus valable.]

43) Le champ électromagnétique à l'intérieur d'un conducteur ohmique dans l'A.R.Q.S. et la température dans un matériau au sein duquel est vérifiée la loi de Fourier (sans source d'énergie) vérifient la même équation. On peut signaler que l'équation de Schrödinger à potentiel nul est une équation de la diffusion.

44) La différence $u_{k,m+1} - u_{k,m}$ est la variation pendant τ de la densité surfacique normalisée entre les abscisses ka et $(k+1)a$. Elle correspond à l'**entrée des particules voisines** ($pu_{k-1,m} + pu_{k+1,m}$) mais également à la **sortie des deux côtés** des particules déjà présentes dans la tranche ($-pu_{k,m} - pu_{k,m}$).



45) $\frac{u_{k,m+1} - u_{k,m}}{\tau} = \frac{pa^2}{\tau} \left(\frac{u_{k-1,m} + u_{k+1,m} - 2u_{k,m}}{a^2} \right)$ Par passage à la limite continue, on reconnaît à gauche la dérivée partielle par rapport au temps et à droite la dérivée seconde partielle par rapport à l'espace : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{pa^2}{\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial(n/n_0)}{\partial t} = \frac{pa^2}{\tau} \frac{\partial^2(n/n_0)}{\partial x^2} \rightarrow$ Equation VI.1 à condition de poser $D = \frac{pa^2}{\tau}$.

46) La tranche 0 est alimentée par la tranche 1 et ne déplore **aucune sortie** : $u_{0,m+1} - u_{0,m} = pu_{1,m}$ La tranche 1 est alimentée par la tranche 2 et déplore **deux sorties** : $u_{1,m+1} - u_{1,m} = pu_{2,m} - 2pu_{1,m}$

47) On lit sur la figure 5, $u_0^2(t) \sim 0,12 \frac{t}{\tau} \rightarrow M_0^2(t) \sim 0,12 \frac{D}{p} n_0^2 t = 1,2 D n_0^2 t \rightarrow \alpha = 1,2$

48-49) L'énoncé se contredit : Page 7, le texte indique que le carré du nombre de grains est représenté en fonction de t alors que sur la figure 6 page 8, on découvre le tracé du nombre de grains en fonction de \sqrt{t} ... Ne connaissant pas l'ordre de grandeur de D , seule la Q49 nous permet de trancher :

Il faut faire confiance à la légende de la figure !

La pente de la droite de corrélation est estimée à $53 \text{ } h^{-1/2} = 0,88 \text{ } s^{-1/2}$.

Or $N_p(t) = M_0(t)S = \sqrt{1,2D} n_0 S \sqrt{t} \rightarrow D = 2,4 \cdot 10^{-15} \text{ } \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

On en déduit une estimation de la constante de Boltzmann et du nombre d'Avogadro :

$$k_B = 1,2 \cdot 10^{-23} \text{ } \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \quad \mathcal{N}_A = \frac{R}{k_B} = 6,8 \cdot 10^{23} \text{ } \text{mol}^{-1}$$

L'ordre de grandeur est respecté, on constate une erreur relative de 13 %. On ne pouvait pas s'attendre à beaucoup mieux d'après la figure 6 et les hypothèses formulées (milieu semi-infini, régime permanent ...).

[L'autre analyse donne une pente égale à $53 \text{ } h^{-1} = 0,015 \text{ } s^{-1} \rightarrow D = 4,5 \cdot 10^{-17} \text{ } \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$]