MP **Mardi 11 février 2025**

Devoir surveillé 6 (3h)

Caractérisation et exponentielle des matrices normales

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Notations

- $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{M}_n$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille (n, n).
- E_n désigne l'espace vectoriel des matrices réelles de taille $(n, 1)$ (matrices colonnes). On le munit de son produit scalaire usuel et de la norme (euclidienne) associée définis par :

$$(X \mid Y) = X^\top.Y \text{ et } \|X\| = \sqrt{X^\top X}$$

- $\mathcal{S}_n$ (respectivement $\mathcal{A}_n$) désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ constitué des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n$.
- $\mathcal{O}_n = \left\{A \in \mathcal{M}_n, A^\top A = I_n\right\}$ est le groupe orthogonal d'ordre n.
- $\mathcal{SO}_n = \{A \in \mathcal{O}_n, \det(A) = 1\}$ est le groupe spécial orthogonal d'ordre n.
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ et $\mathrm{S}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$.

Définition 1 : Une matrice A de $\mathcal{M}_n$ est dite **normale** lorsqu'elle commute avec sa transposée, c'est-à-dire lorsque $AA^\top = A^\top A$.

Définition 2 : : $A \in \mathcal{M}_n$ est dite **orthogonalement semblable** à $B \in \mathcal{M}_n$, s'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $B = Q^\top AQ$. (On pourra noter en abrégé : A est ORTS à B)

Objectifs

- Dans un premier temps, ce problème vise à établir que, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :
  - $(\mathbf{C_1})$ Il existe un polynôme P à coefficients réels tel que $A^\top = P(A)$.
  - $(\mathbf{C_2})$ La matrice A est normale.
  - $(\mathbf{C}_3)$ Pour tout $X \in E_n, \left\|A^\top X\right\| = \|AX\|$.
  - $(\mathbf{C}_4)$ La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :
    - soit de taille $(1, 1)$,
    - soit de taille $(2, 2)$ du type $r\mathrm{R}(\theta)$, où $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- Dans un second temps, on caractérisera l'exponentielle d'une telle matrice.

Résultats préliminaires :

Q 1) a) Montrer que la relation ORTS est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n$.
b) Montrer que pour toute $A \in \mathcal{M}_n$ inversible, il existe un polynôme P tel que $A^{-1} = P(A)$.

Exemples

Q 2) Montrer que les éléments de $\mathcal{S}_n$ vérifient les conditions $(\mathbf{C_1}), (\mathbf{C_2}), (\mathbf{C_3})$ et $(\mathbf{C_4})$, et que ceux de $\mathcal{A}_n$ vérifient les conditions $(\mathbf{C_1}), (\mathbf{C_2})$ et $(\mathbf{C_3})$.

Q 3) Montrer que les éléments de $\mathcal{O}_n$ vérifient les conditions $(\mathbf{C_1}), (\mathbf{C_2}), (\mathbf{C_3})$ et $(\mathbf{C_4})$.

Q 4) Les résultats de la question précédente se généralisent immédiatement aux matrices de la forme rT, où $r > 0$ et $T \in \mathcal{O}_n$, sauf pour la condition $(\mathbf{C}_1)$ moins évidente (démonstration non demandée).
Montrer que si $\mathbf{n} = \mathbf{2}$ alors les matrices rT, où $r > 0$ et $T \in \mathcal{O}_n$, vérifient $(\mathbf{C_1})$.

Une implication et une équivalence

Q 5) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie la condition $(\mathbf{C_1})$, alors A vérifie la condition $(\mathbf{C_2})$.

Q 6) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n$, $(\mathbf{C_2}) \Rightarrow (\mathbf{C_3})$ puis montrer la réciproque par polarisation.

Les conditions équivalentes (C_3) et (C_2) impliquent la condition (C_4)

Q 7) Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$ et soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ vérifiant la condition $(\mathbf{C_2})$. Montrer que $c = b$ ou bien ($b \neq 0$ et $c = -b$ et $a = d$). En déduire que A vérifie $(\mathbf{C_4})$.

Dans toute la suite de cette partie, on se donne $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant les conditions équivalentes $(\mathbf{C_2})$, $(\mathbf{C_3})$.

Q 8) Montrer que, pour tout réel λ, la matrice $A - \lambda I_n$ vérifie (C_2) et $(\mathbf{C_3})$.

Q 9) En déduire que A et $A^\top$ ont les mêmes sous-espaces propres et qu'ils sont deux à deux orthogonaux.

Q 10) En utilisant la question précédente, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour qu'elle soit diagonalisable.

Q 11) a) Montrer que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ admet au moins une droite ou un plan stable.

b) Pour $n \geqslant 3$, montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice du type $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ vérifient $(\mathbf{C_3})$, avec $p \in \{1, 2\}$. On pourra commencer par montrer qu'en notant a l'endomorphisme $X \mapsto A.X$, pour tout s.e.v. F de E stable par a, $F^\perp$ est aussi stable par a.

Q 12) Montrer que si A vérifie la condition $(\mathbf{C_3})$, alors A vérifie la condition (C_4).

La condition (C_4) implique la condition (C_1)

Soit $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$, une famille de n complexes deux à deux distincts.

Q 13) a) Établir l'existence d'un unique polynôme P de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad P(z_k) = \overline{z_k}$

b) On suppose de plus que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}, \overline{z_k} \in Z$. Montrer alors que le polynôme P est à coefficients réels.

Q 14) Soient $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P\left(re^{i\theta}\right) = re^{-i\theta}$. Montrer que $P(r\mathrm{R}(\theta)) = (r\mathrm{R}(\theta))^\top$. *Lorsque* $\sin\theta \neq 0$, *on pourra utiliser la division euclidienne de* P *par le polynôme caractéristique* χ *de la matrice* $rR(\theta)$ *de* $\mathcal{M}_2$.

Q 15) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie la condition $(\mathbf{C_4})$, alors A vérifie la condition $(\mathbf{C_1})$.

Exponentielle d'une matrice normale

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$ est désormais muni de la norme $\|.\|$ définie par :

$$\forall A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n, \quad \|A\| = n.\max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |A_{i,j}|$$

Q 16) Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2, \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p(A) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k$.

Q 17) Montrer que la suite $(S_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n$, vers une limite que l'on notera $\mathrm{Exp}(A)$, et que :

$$\forall Q \in \mathcal{O}_n, \quad \mathrm{Exp}\left(Q^\top A Q\right) = Q^\top \mathrm{Exp}(A) Q$$

Q 18) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ constitué des matrices normales de $\mathcal{M}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n$. Qu'en déduit-on pour $\mathrm{Exp}(A)$, lorsque $A \in \mathcal{E}_n$?

Q 19) a) Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Exp}(r\mathrm{R}(\theta)) = e^{r\cos\theta}\mathrm{R}(r\sin\theta)$.

b) En déduire que $\mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ orthogonalement semblables aux matrices diagonales par blocs, dont chaque bloc diagonal est : - soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1$, avec $\mu > 0$ - soit du type $\alpha\mathrm{R}(\beta) \in \mathcal{M}_2$, avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Ce qui suit n'est PAS à faire en DS : On note $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n$ définies positives, et $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des matrices B de $\mathcal{M}_n$ vérifiant les deux conditions :

- les valeurs propres négatives de B sont de multiplicité paire
- il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}$et $T \in \mathcal{SO}_n$ telles que $B = ST = TS$.

Q 20) Démontrer que $\mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{F}_n$.

Q 21) La matrice $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$ définie par : $B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leqslant i+1 = j \leqslant n \text{ ou } (i,j) = (n,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$?