Devoir surveillé 6 d'après CCMP PSI 2020 : une solution

Q 1)
- Réflexivité : $\forall A \in \mathcal{M}_n, A$ ORTS à A, car $I_n \in \mathcal{O}_n$ et $A = I_n^{\top} A I_n$.
- Symétrie : on veut montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n, A$ ORTS à $B \Longrightarrow B$ ORTS à A.
  Or si $Q \in \mathcal{O}_n$ est tel que $B = Q^{\top} A Q$, comme $Q^{\top} = Q^{-1} \in \mathcal{O}_n$, on a $B = Q^{-1} A Q$ et donc $A = QBQ^{-1} = (Q^{\top})^{\top} B.(Q^{\top})$.
- Transitivité : $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_n, A$ ORTS à B et B ORTS à $C \Longrightarrow A$ ORTS à C, car si $Q, Q' \in \mathcal{O}_n$ sont tels que $B = Q^{\top} A Q$ et $C = (Q')^{\top} B Q'$, alors $QQ' \in \mathcal{O}_n$ et $C = (Q')^{\top} Q^{\top} A Q Q' = (QQ')^{\top} A (QQ')$.

Donc la relation ORTS est bien une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n$.

Q 2) Soit $S \in \mathcal{S}_n$. On a ${}^{t}S = S$, donc :
- $(\mathbf{C_1})\, S^{\top} = S = P(S)$ où P est le monôme $P(X) = X$.
- $(\mathbf{C}_2)\, S$ est normale puisqu'elle commute avec elle-même.
- $(\mathbf{C}_3)$ Pour tout $X \in E_n, \|S^{\top} X\| = \|SX\|$ de façon évidente puisque $S^{\top} = S$.
- $(\mathbf{C}_4)$ D'après le théorème spectral, S est ORTS à une matrice diagonale, donc diagonale par blocs avec des blocs diagonaux tous de taille $(1,1)$, donc S vérifie ($\mathbf{C}_4$).

Soit $A \in \mathcal{A}_n$. On a $A^{\top} = -A$, donc :
- $(\mathbf{C}_1)\, A^{\top} = -A = P(A)$ où P est le monôme $P(X) = -X$.
- $(\mathbf{C}_2)\, A$ est normale puisque toute matrice A commute avec $-A$.
- $(\mathbf{C}_3)$ Pour tout $X \in E_n, \|A^{\top} X\| = \|-AX\| = \|AX\|$ par homogénéité de la norme.

Q 3) Soit $A \in \mathcal{O}_n$. A est inversible et $A^{\top}$ est l'inverse de A, et par Q1) b), on sait qu'il existe un $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$ donc **(C1)** est vérifiée.

En outre $AA^{\top} = A^{\top} A\,(= I_n)$ et A est une matrice normale donc **(C2)** est vérifiée.

Soit $X \in E_n . \|AX\| = \|X\|$ car l'endomorphisme de E_n canoniquement associé à A est une isométrie. Il en est de même de l'endomorphisme de E_n canoniquement associé à $A^{-1} = A^{\top}$, donc la condition $(\mathbf{C_3})$ est vérifiée.

Enfin$(\mathbf{C}_4)$ est donnée par le théorème de réduction des isométries vectorielles du programme.

Q 4) La matrice $T \in \mathcal{O}_2$ est de type $R(\theta)$ ou $S(\theta)$, où $\theta \in \mathbb{R}$ (cf. le préambule). (a) Cas $T = S(\theta)$.
Dans ce cas, la matrice $M = rT$ est symétrique réelle, donc d'après la question 2 , elle vérifie les conditions $(\mathbf{C_1})$ à $(\mathbf{C}_4)$. (b) Cas $T = R(\theta)$.
Dans ce cas, la matrice $M = rT = rR(\theta)$ vérifie la condition $(\mathbf{C}_4)$ de façon évidente (M est ORTS à elle-même), et elle vérifie la condition ($\mathbf{C_1}$) puisque

$$M^{\top} = r\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = 2r\cos(\theta) I_2 - r\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

donc $M^{\top} = P(M)$ où $P(X) = 2r\cos(\theta) - X \in \mathbb{R}[X]$.

Q 5) Soit $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition (C_1). Puisque pour tout couple (Q_1, Q_2) de polynômes, $Q_1(A)Q_2(A) = (Q_1 Q_2)(A)$, alors $AP(A) = P(A)A$, et A est une matrice normale.

Q 6) a) Soit maintenant $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition (C_2), et $X \in E_n$. Alors :

$$\left\|A^{\top} X\right\| = \left(A^{\top} X\right)^{\top} A^{\top} X = X^{\top} A A^{\top} X \overset{(*)}{=} X^{\top} A^{\top} A X = (AX)^{\top} AX = \|AX\|.$$

où $(*)$ utilise l'hypothèse (C_2).

N.B. La même preuve en langage vectoriel en notant A^* au lieu de $A^{\top}$ pour désigner l'adjoint de $X \mapsto AX$

$$\forall\ X \in E_n, \quad (AX|AX) = (X|A^* AX) = (X|AA^* X) = \|A^* X\|^2.$$

b) On vient de voir que (C_3) donnait que pour tout $X \in E_n$,

$$(X|A^{\top} AX) = (X|AA^{\top} X) \quad (\dagger)$$

Or pour deux matrices symétriques S_1 et S_2 la formule de polarisation permet de passer de l'égalité

$$\forall X \ \in E_n,\ (X|S_1X) = (X|S_2X)$$

à l'égalité

$$\forall X,Y \in E_n,\ (Y|S_1X) = (Y|S_2X).$$

En effet en notant $q_1(X) - = (X|S_1X)$, on a :

$$(Y|S_1X) = \frac{1}{2}(q_1(X+Y) - q_1(X) - q_1(Y))$$

Comme les matrices $A^\top A$ et $A.A^\top$ sont symétriques, on déduit de (†) que :

$$\forall X,Y \in E_n,\ (Y|A.A^\top X) = (Y|A^\top AX),$$

ce qui par unicité dans le théorème de Riesz donne finalement que $A^\top A = AA^\top$.

Q 7) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

La condition $A.A^\top = A^\top.A$ équivaut à $\begin{cases} a^2+b^2 = a^2+c^2 \\ ac+bd = ab+cd \\ c^2+d^2 = b^2+d^2 \end{cases}$. c'est-à-dire à : $\begin{cases} b = \varepsilon c \\ (a-b)(d-c) = 0 \end{cases}$

Dans le cas $b = c$, on a A symétrique.
Dans le cas $b = -c$, on a $a = d$ et dans ce cas on peut supposer $b = 0$ puisque sinon on a aussi $c = 0$ et on retombe dans le cas A symétrique.

Q 8) On calcule

$$\begin{aligned} (A-\lambda I)^\top.(A-\lambda I) &= (A^\top - \lambda I)(A-\lambda I), \\ &= A^\top A - \lambda A - \ \lambda A^\top + \lambda^2 I, \\ &= A.A^\top \lambda A - \ \lambda A^\top + \lambda^2 I, \\ &= (A-\lambda I)(A^\top - \lambda I) \\ &= (A-\lambda I)(A-\lambda I)^\top. \end{aligned}$$

Q 9) a)Si λ une valeur propre de A , et X un vecteur propre de A associé à λ, alors $\|(A-\lambda I_n)X\| = 0$, et, d'après la question 8 , puisque A vérifie la condition (C_3) , $\|(A^\top - \lambda I_n)X\| = 0 : X$ est un vecteur propre de $A^\top$ associé à λ donc $E_\lambda(A) \subset E_\lambda(A^\perp)$.
Réciproquement, comme $(A^\top)^\top = A$, on en déduit que $\ker(A-\lambda I_n) = \ker(A^\top - \lambda I_n)$, et A et $A^\top$ ont les mêmes sous-espaces propres.
Remarque : pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n$, $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^\top)$ puisque $\det(A-\lambda I) = \det(A-\lambda I)^\top = \det(A^\top - \lambda I)$, mais si A n'est pas une matrice normale comme ici, ils n'ont pas forcément les mêmes s.e.v propres, par exemple si A est la matrice d'un projecteur p non orthogonal, $A^\top$ est la matrice du projecteur sur $(\ker p)^\top$ parallèlement à $(\mathrm{Im}\, p)^\perp$.
b) Ensuite, si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes de A, et X_1 et X_2 deux vecteurs propres respectivement associés à chacune des deux valeurs propres,

$$(X_1|AX_2) = \lambda_2(X_1|X_2)$$

et

$$(X_1|AX_2) = (A^\top X_1|X_2) = \lambda_1(X_1|X_2)$$

car X_1 est aussi un vecteur propre de $A^\top$, associé à la valeur propre λ_1. Donc

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(X_1|X_2) = 0$$

, et X_1 et X_2 sont deux vecteurs orthogonaux, et les deux sous-espaces propres $\ker(A-\lambda_1 I_n)$ et $\ker(A-\lambda_2 I_n)$ sont orthogonaux.

Q 10) Si A est diagonalisable, ses sous-espaces propres étant deux à deux orthogonaux, A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale : A est une matrice symétrique. Finalement, une matrice A vérifiant (C_3) est diagonalisable si et seulement si elle est symétrique.

Q 11) a) Cf cours : soit f un tel endomorphisme. Si f admet une v.p. réelle c'est gagné

Sinon, on note A une matrice représentant f. Elle admet une v.p. complexe non réelle λ et soit $Z \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AZ = \lambda Z$.

On décompose $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $Z = X + iY$ avec $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors $AX + iAY = \alpha X - \beta Y + i(\alpha Y + \beta X)$ En identifiant parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} AX = \alpha X - \beta Y, \\ AY = \beta X + \alpha Y \end{cases}$$

Mais ce système dit que si on note x et y les vecteurs de E représentés par X et Y alors le plan $\mathrm{Vect}(x, y)$ est stable par f.

b) Ex. planche. Avec les notations de l'énoncé comme a laisse F stable, la matrice de a dans une base o.n. respectant la décomposition $E = F \oplus F^\perp$ sera de la forme : $M = Q^\top AQ = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

On veut montrer que $B = 0$

Mais $M^\top = \begin{pmatrix} A_1^\top & 0 \\ B^\top & A_2^\top \end{pmatrix}$

et en traduisant $AA^\top = A^\top A$ on obtient en part.

$$A_1^\top A_1 - A_1 A_1^\top = BB^\top$$

En prenant la trace dans cette égalité, on a $\mathrm{Tr}(B.B^\top) = 0$ ce qui, en reconnaissant la norme euclidienne de B au carré, donne $B = 0$.

(M2) En fait A_1 est la matrice de la restriction de a à F stable.

Or avec la caractérisation (C_3) des endomorphismes normaux, la restriction d'un endomorphisme normal à un s.e.v. stable est encore un endo. normal donc $A_1^\top A_1 - A_1 A_1^\top = 0$.

Q 12) On procède ici par récurrence forte sur la taille n de la matrice : on démontre la proposition $\mathcal{P}_n$: si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie (C_3), A vérifie (C_4). Le cas $n = 1$ est trivial, et le cas $n = 2$ a été démontré à la question 7 . On considère un entier $n \geq 3$, et on suppose que toute matrice de $\mathcal{M}_k, k < n$, vérifiant (C_3) vérifie (C_4). On considère alors une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant (C_3). D'après la question précédente, A est ORTS à une matrice du type $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$, et $p = 1$ ou 2 . Les matrices A_1 et A_2 vérifient encore la condition (C_3), et soit par l'étude des cas en dimension 1 ou 2 , soit par hypothèse de récurrence, vérifient la condition (C_4) : il existe $Q_1 \in \mathcal{O}_p$ et $Q_2 \in \mathcal{O}_{n-p}$ telles que les matrices $Q_1 A_1 Q_1^\top$ et $Q_2 A_2 Q_2^\top$ sont diagonales par blocs, avec des blocs diagonaux de taille 1×1 ou de la forme $rR(\theta), r > 0$. On vérifie alors que la matrice $QAQ^\top$, avec $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$ est diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux de taille 1×1 ou de la forme $rR(\theta), r > 0$, la récurrence est établie.

Q 13) a) C'est une conséquence immédiate du théorème d'interpolation de Lagrange. Vu la question, on va donc le redémontrer,

(M1) Unicité : la différence deux polynômes de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ vérifiant chacun $P(z_k) = \overline{z_k}$ pour tout $k = 1, \ldots, n$ possède n racines deux à deux distinctes. C'est donc le polynôme nul, et les deux polynômes sont égaux.

Existence : on vérifie que le polynôme $P = \sum_{k=1}^n \overline{z_k} L_k$, où $L_k = \prod_{i \neq k} \frac{X - z_i}{z_k - z_i}$, convient.

(M2) plus conceptuelle : algèbre linéaire pure

L'application $\varphi : \mathbb{C}_{n-1}[X] \to \mathbb{C}^n, P \mapsto (P(z_1), \ldots, P(z_n))$, est clairement linéaire et injective (car le seul polynôme de degré $\leqslant n-1$ admettant n racines distinctes est le polynôme nul). Et comme les espaces $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{C}^n$ sont de même dimension finie (à savoir n), l'application

φ est un isomorphisme. Ainsi le n-uplet $(\overline{z_1},\ldots,\overline{z_n}) \in \mathbb{C}^n$ a un unique antécédent par φ. Autrement dit, il existe un unique $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1;n]\!], P(z_k) = \overline{z_k}$.
b) Si pour tout k le complexe $\overline{z_k}$ est dans l'ensemble Z, alors on peut appliquer l'hypothèse sur les z_k aux $\overline{z_k}$, on sait donc aussi que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$P(\overline{z_k}) = \overline{\overline{z_k}} = z_k \quad (\dagger)$$

. Pour en déduire que $P \in \mathbb{R}[x]$, on note $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ et $\overline{P} = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a_k} z^k$. On veut donc montrer que $\overline{P} = P$.
Par le résultat d'unicité du a), il suffit de montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\overline{P}(z_k) = P(z_k)$$

et donc avec l'hypothèse sur P il suffit de montrer que

$$\overline{P}(z_k) = \overline{z_k} \quad (\ddagger)$$

Or l'égalité $(\dagger)$ s'écrit explicitement :

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i (\overline{z_k})^i = z_k$$

donc en conjuguant cette égalité on a :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overline{a_i} z_k^i = \overline{z_k}$$

ce qui est exactement $(\ddagger)$.

Q 14) On suit l'indication de l'énoncé.
• Si $\sin(\theta) = 0, R(\theta) = \epsilon I_2$, avec $\epsilon = \pm 1$.
Par hypothèse dans ce cas $P(\epsilon r) = \epsilon r \quad (*)$.
Or ici $P(rR(\theta)) = P(\epsilon r I_2) = P(\epsilon r) I_2$ donc avec $(*)$;

$$P(rR(\theta)) = \epsilon r I_2 = (rR(\theta))^\top.$$

• Sinon, on note χ le polynôme caractéristique de $rR(\theta)$:

$$\chi = X^2 - 2r\cos(\theta)X + r^2 = \left(X - re^{i\theta}\right)\left(X - re^{-i\theta}\right).$$

Par le théorème de division euclidienne, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ et deux réels a et b tels que

$$P = \chi \times Q + aX + b. \quad (0)$$

On évalue cette relation polynomiale avec $X \to re^{i\theta}$:

$$P\left(re^{i\theta}\right) = are^{i\theta} + b, \quad (1)$$

comme par déf. de P, on a :

$$P\left(re^{i\theta}\right) = re^{-i\theta} \quad (2)$$

on déduit de (1) et (2) que :

$$\begin{cases} ar\cos(\theta) + b = r\cos(\theta), \\ ar\sin(\theta) = -r\sin(\theta) \end{cases}$$

et comme $r > 0$ et $\sin(\theta) \neq 0$, on conclut que :

$$a = -1 \quad \text{et} \quad b = 2r\cos(\theta).$$

Ensuite, grâce au théorème de Cayley-Hamilton, si on évalue la relation polynomiale (0) via $X \to rR(\theta)$:

$$P(rR(\theta)) = arR(\theta) + bI_2 = -r\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} + 2r\cos(\theta)I_2 = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) & r\sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{pmatrix} = (rR(\theta))^\top$$

Q 15) Soit $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition (C_4). A est ORTS à une matrice B de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & a_k & & & \\ & & & r_1 R(\theta_1) & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & r_l R(\theta_l) \end{pmatrix}, \text{ où } a_1, \dots, a_k$$

sont des réels, $r_1, \dots, r_l$ des réels strictement positifs, et $\theta_1, \dots, \theta_l$ des réels. Notons $z_1, \dots, z_m$ l'ensemble des éléments de la liste $\left[a_1, \dots, a_k, r_1 e^{i\theta_1}, r_1 e^{-i\theta_1}, \dots, r_l e^{i\theta_l}, r_l e^{-i\theta_l}\right]$. Les complexes $z_1, \dots, z_m$ sont deux à deux distincts, et, d'après la question 13 , il existe un polynôme P de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$ tel que $P(z_j) = \overline{z_j}$ pour tout $j = 1 \dots m$. Ainsi $P(a_j) = a_j$ pour tout $j = 1 \dots k$ et $P\left(r_j e^{i\theta_j}\right) = r_j e^{-i\theta_j}$ pour tout $j = 1 \dots m$. De plus, pour tout $k = 1 \dots m, \overline{z_k} \in \{z_1, \dots, z_m\}$. Ainsi P est à coefficients réels par la Q13 b). On vérifie alors, par le calcul par blocs et le résultat de la question 14 , que $P(B) = B^\top$, puis que $P(A) = A^\top$.

Q 16) Si $AB = (C_{i,j})$, alors, pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et $n, C_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j}$, et $|C_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^n |A_{i,k}||B_{k,j}| \leq n\|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$, ce qui prouve que $\|C\|_\infty \leq n\|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$ et en multipliant par n, on a le résultat sur la norme de l'énoncé.

Q 17) La suite $(S_p(A))$ est une somme partielle de série dans un espace vectoriel de dimension finie donc on sait qu'il suffit de montrer qu'elle converge absolument pour une norme de notre choix. On choisit la norme de la question précédente qui est une norme d'algèbre.

Ainsi pour cette norme $\|A^k\|/k! \leq \|A\|^k/k!$ et ce majorant est terme général de série convergente, on conclut par le théorème de comparaison pour les séries à termes positfs.

Si maintenant $Q \in \mathcal{O}_n$, et p est un entier naturel,

$$\begin{aligned} S_p\left(Q^\top A Q\right) &= \sum_{k=0}^p \frac{\left(Q^\top A Q\right)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{Q^\top A^k Q}{k!} \text{ car } Q^\top Q = I_n \\ &= Q^\top \left(\sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!}\right) Q \\ &= Q^\top S_p(A) Q \\ &\underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} Q^\top \operatorname{Exp}(\ A) Q \end{aligned}$$

le dernier passage à la limite étant justifié par le fait que $M \in \mathcal{M}_n \mapsto Q^\top M Q$ est une application linéaire sur un espace de dimension finie, donc est continue.

Par unicité de la limite, on a bien montré que

$$\operatorname{Exp}\left(Q^\top A Q\right) = Q^\top \text{ A} Q$$

Q 18) a) L'application $\Phi : A \in \mathcal{M}_n \mapsto A^\top A - AA^\top$ est continue par continuité de la transposition (linéaire en dim. finie) et du produit matriciel. On en déduit que comme $\mathcal{E}_n = \Phi^{-1}(\{0\})$, c'est une partie fermée de $\mathcal{M}_n$. Si $A \in \mathcal{E}_n$ et p est un entier naturel, alors $S_p(A) \in \mathcal{E}_n$.'

b) On remarque d'abord que si $A \in \mathcal{E}_n$ alors $S_p(A) \in \mathcal{E}_n$ pour tout p.

En effet ; puisque pour tout k, $(A^k)^\top = (A^\top)^k$, et pour tout k, l, $A^k.(A^\top)^l = (A^\top)^l.A^k$ donc on a :

$$\begin{aligned} S_p(A) S_p(A)^\top &= \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!})(\sum_{l=0}^p \frac{(A^\top)^l}{l!} \\ &= \sum_{k \leq p, l \leq p} \frac{A^k (A^\top)^l}{k! l!} \\ &= \sum_{k \leq p, l \leq p} \frac{(A^\top)^l A^k}{k! l!} \\ &= S_p(A)^\top . S_p(A) \end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{E}_n$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n$, la limite de la suite $(S_p(A))$ est donc encore dans $\mathcal{E}_n$: donc $\operatorname{Exp}(A)$ est encore une matrice normale.

Q 19) a) On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}, R(\theta)^k = R(k\theta)$. Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$S_p(rR(\theta)) = \sum_{k=0}^{p} \frac{r^k}{k!} R(k\theta) = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{p} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} & -\sum_{k=0}^{p} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} \\ \sum_{k=0}^{p} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} & \sum_{k=0}^{p} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} \end{bmatrix}. \quad (*)$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{r^k \exp(ik\theta)}{k!} \right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{(r \exp(i\theta))^k}{k!} \right) \\
&\underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \operatorname{Re}(\exp(r \exp(i\theta))) = \operatorname{Re}(\exp(r\cos(\theta) + ir\sin(\theta))) \\
&\underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \operatorname{Re}(e^{r\cos(\theta)}(\cos(r\sin(\theta)) + i\sin(r\sin(\theta))) = e^{r\cos(\theta)} \cos(r\sin(\theta))
\end{aligned}$$

De même

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} e^{r\cos(\theta)} \sin(r\sin(\theta))$$

Ainsi, en passant à la limite dans $(*)$, on obtient :

$$\exp(rR(\theta)) = \begin{bmatrix} e^{r\cos(\theta)} \cos(r\sin(\theta)) & -e^{r\cos(\theta)} \sin(r\sin(\theta)) \\ e^{r\cos(\theta)} \sin(r\sin(\theta)) & e^{r\cos(\theta)} \cos(r\sin(\theta)) \end{bmatrix}$$

ce qui est la formule demandée.

b) Soit $A \in \mathcal{E}_n$. Il existe une matrice orthogonale Q telle $Q^\top AQ$ est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & a_k & & & \\ & & & r_1 R(\theta_1) & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & r_l R(\theta_l) \end{pmatrix}$$

où $a_1, \dots, a_k$ sont des réels, $r_1, \dots, r_l$ des réels strictement positifs, et $\theta_1, \dots, \theta_l$ des réels. D'après les règles du calcul par blocs,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Exp}(A) &= Q \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & e^{a_k} & & & \\ & & & \exp(r_1 R(\theta_1)) & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & \exp(r_l R(\theta_l)) \end{pmatrix} Q^{-1} \\
&= Q \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & e^{a_k} & & & \\ & & & e^{r_1 \cos(\theta_1} R(r_1 \sin(\theta_1))) & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & e^{r_l \cos(\theta_l} R(r_l \sin(\theta_l))) \end{pmatrix} Q^{-1}
\end{aligned}$$

et $\operatorname{Exp}(A)$ est bien ORTS à une matrice du type demandé.

Réciproquement, une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & \mu_k & & & \\ & & & \alpha_1 R(\beta_1) & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & \alpha_l R(\beta_l) \end{pmatrix},$$

où $\mu_1, \ldots, \mu_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ sont des réels strictement positifs, et $\beta_1, \ldots, \beta_l$ des réels, est l'exponentielle de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & a_k & & & \\ & & & r_1 R(\theta_1) & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & r_l R(\theta_l) \end{pmatrix}$$

où $a_j = \ln(\mu_j)$, $r_j = \sqrt{\ln(\alpha_j)^2 + \beta_j^2}$ et θ_j est un réel vérifiant $\cos(\theta_j) = \frac{\ln(\alpha_j)}{r_j}$ et $\sin(\theta_j) = \frac{\beta_j}{r_j}$. D'où l'équivalence demandée.