

D.M. 13 : v.a.d. combinaisons linéaires de var. de Rademacher

Pour le lundi 17 mars 2025

Le problème étudie quelques propriétés de variables aléatoires réelles finies de la forme $\sum_{k=1}^n a_k X_k$, où les a_k sont des réels et les X_k sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\{1, -1\}$. La première partie établit des résultats sur des intégrales, utilisés dans les parties suivantes. À partir de la deuxième partie, on suppose donnée une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , à valeurs dans $\{1, -1\}$ et vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

I Suites et intégrales

Étude d'une intégrale à paramètre

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} dt$$

Q1) Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

Q2) Déterminer les limites de f et f' en $+\infty$.

Q3) Exprimer f'' sur $]0, +\infty[$ à l'aide de fonctions usuelles et en déduire que

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

Q4) Montrer

$$\begin{cases} \forall x > 0, \quad f(x) = x \ln(x) - \frac{1}{2} x \ln(x^2 + 1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2} \\ f(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Q5) Montrer

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad |s| = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt$$

Étude d'une suite d'intégrales

Dans cette section, on étudie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^\infty \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2} dt$$

Q6) a) Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et préciser la monotonie de la sous-suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

b) Montrer que $u_1 = u_2 = \frac{\pi}{2}$.

Q7) Calcul d'un équivalent de u_n

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n \quad \text{avec} \quad v_n = \int_0^\infty \frac{1 - (\cos(\sqrt{2u/n}))^n}{u\sqrt{u}} du$$

b) Montrer que

$$\forall (n, u) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1], \quad \left| 1 - (\cos(\sqrt{2u/n}))^n \right| \leq u$$

c) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite finie l vérifiant

$$l = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-u}}{u\sqrt{u}} du$$

d) On admet la relation $\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi}$.

Conclure que $u_n \sim \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$.

II Autour du pile ou face

Dans cette partie, comme il est indiqué dans le préambule, on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{1, -1\}$ et telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. L'espérance d'une variable aléatoire réelle finie Z est notée $E(Z)$ et sa variance $V(Z)$.

Q8) Étude de $E(|S_n|)$

- a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n .
- b) Soit S et T deux variables aléatoires réelles finies indépendantes définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) .
On suppose que T et $-T$ ont même loi. Montrer que $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))$.
- c) On considère la fonction φ_n de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $\varphi_n(t) = E(\cos(S_n t))$ pour tout réel t .
Montrer que $\varphi_n(t) = (\cos t)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t .
- d) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(|S_n|) = \frac{2}{\pi} u_n$.
On utilisera l'expression intégrale de la valeur absolue obtenue à la question I.A.5.
- e) Déduire de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = u_{2n+2}$.

Q9) Étude de $\frac{S_n}{n}$ (démonstration de la loi forte des grands nombres pour ces v.a.d. particulières) :

On se propose de démontrer que la suite $(\frac{S_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0, c'est-à-dire qu'il existe un événement négligeable $\mathcal{Z} \in \mathcal{A}$ tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z}, \quad \frac{S_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_n = \left(\frac{S_n}{n} \right)^4 \quad \text{et} \quad z_n = \left\{ \omega \in \Omega, \exists k \geq n, U_k(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \right\}$$

- a) Montrer que $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{3}{n^{3/2}}$.
- c) Montrer que $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$.
- d) En considérant $\mathcal{Z} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} z_n$, montrer que $(\frac{S_n}{n})$ converge presque sûrement vers 0.

III D'autres sommes aléatoires

On conserve la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de la partie précédente et on considère de plus une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels positifs ou nuls. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^n a_k X_k$.

Q10) Étude de $E(|T_n|)$

- a) Montrer que la suite $(E(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
- b) Montrer que si la série $\sum a_n^2$ est convergente, alors la suite $(E(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
- c) On suppose $a_1 \geq a_2 + \dots + a_n$. Montrer $E(|T_n|) = E(|T_1|) = a_1$.

Q11) Application à une suite d'intégrales :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$J_n = \int_0^\infty \frac{1 - \cos(t) \cos\left(\frac{t}{3}\right) \cdots \cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)}{t^2} dt$$

- a) Montrer que $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite bien définie et qu'elle est croissante et convergente.
On posera $a_k = \frac{1}{2k-1}$ et on exprimera l'espérance de $|T_n|$ avec la méthode de la question II.A.4.
- b) Montrer que $J_n = \frac{\pi}{2}$ pour $1 \leq n \leq 7$ et que $(J_n)_{n \geq 7}$ est strictement croissante.