

## D.M. 13 : v.a.d. combinaisons linéaires de var. de Rademacher

Pour le lundi 17 mars 2025

Le problème étudie quelques propriétés de variables aléatoires réelles finies de la forme  $\sum_{k=1}^n a_k X_k$ , où les  $a_k$  sont des réels et les  $X_k$  sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans  $\{1, -1\}$ . La première partie établit des résultats sur des intégrales, utilisés dans les parties suivantes. À partir de la deuxième partie, on suppose donnée une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , à valeurs dans  $\{1, -1\}$  et vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

### I Suites et intégrales

#### Étude d'une intégrale à paramètre

Pour  $x \in \mathbb{R}^+$ , on pose

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} dt$$

**Q1)** Montrer que  $f$  est définie et continue sur  $[0, +\infty[$  et de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$ .

**Q2)** Déterminer les limites de  $f$  et  $f'$  en  $+\infty$ .

**Q3)** Exprimer  $f''$  sur  $]0, +\infty[$  à l'aide de fonctions usuelles et en déduire que

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

**Q4)** Montrer

$$\begin{cases} \forall x > 0, & f(x) = x \ln(x) - \frac{1}{2} x \ln(x^2 + 1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2} \\ f(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

**Q5)** Montrer

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad |s| = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt$$

#### Étude d'une suite d'intégrales

Dans cette section, on étudie la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^\infty \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2} dt$$

**Q6)** a) Justifier l'existence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et préciser la monotonie de la sous-suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ .  
b) Montrer que  $u_1 = u_2 = \frac{\pi}{2}$ .

**Q7)** Calcul d'un équivalent de  $u_n$

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n \quad \text{avec} \quad v_n = \int_0^\infty \frac{1 - (\cos(\sqrt{2u/n}))^n}{u\sqrt{u}} du$$

b) Montrer que

$$\forall (n, u) \in \mathbb{N}^* \times ]0, 1], \quad \left| 1 - (\cos(\sqrt{2u/n}))^n \right| \leq u$$

c) Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  admet une limite finie  $l$  vérifiant

$$l = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-u}}{u\sqrt{u}} du$$

d) On admet la relation  $\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi}$ .

Conclure que  $u_n \sim \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$ .

## II Autour du pile ou face

Dans cette partie, comme il est indiqué dans le préambule, on considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans  $\{1, -1\}$  et telles que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . L'espérance d'une variable aléatoire réelle finie  $Z$  est notée  $E(Z)$  et sa variance  $V(Z)$ .

**Q8)** Étude de  $E(|S_n|)$

- Déterminer l'espérance et la variance de  $S_n$ .
- Soit  $S$  et  $T$  deux variables aléatoires réelles finies indépendantes définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . On suppose que  $T$  et  $-T$  ont même loi. Montrer que  $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))$ .
- On considère la fonction  $\varphi_n$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\varphi_n(t) = E(\cos(S_n t))$  pour tout réel  $t$ .

Montrer que  $\varphi_n(t) = (\cos t)^n$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout réel  $t$ .

- Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E(|S_n|) = \frac{2}{\pi} u_n$ .

On utilisera l'expression intégrale de la valeur absolue obtenue à la question I.A.5.

- Déduire de la question précédente que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{2n+1} = u_{2n+2}$ .

**Q9)** Étude de  $\frac{S_n}{n}$  (démonstration de la loi forte des grands nombres pour ces v.a.d. particulières) :

On se propose de démontrer que la suite  $(\frac{S_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge presque sûrement vers 0, c'est-à-dire qu'il existe un événement négligeable  $\mathcal{Z} \in \mathcal{A}$  tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z}, \quad \frac{S_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$U_n = \left(\frac{S_n}{n}\right)^4 \quad \text{et} \quad z_n = \left\{ \omega \in \Omega, \exists k \geq n, U_k(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \right\}$$

- Montrer que  $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}) \leq \frac{3}{n^{3/2}}$ .
- Montrer que  $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{A}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$ .
- En considérant  $\mathcal{Z} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_n$ , montrer que  $(\frac{S_n}{n})$  converge presque sûrement vers 0.

## III D'autres sommes aléatoires

On conserve la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de la partie précédente et on considère de plus une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de réels positifs ou nuls. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $T_n = \sum_{k=1}^n a_k X_k$ .

**Q10)** Étude de  $E(|T_n|)$

- Montrer que la suite  $(E(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.
- Montrer que si la série  $\sum a_n^2$  est convergente, alors la suite  $(E(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente.
- On suppose  $a_1 \geq a_2 + \dots + a_n$ . Montrer  $E(|T_n|) = E(|T_1|) = a_1$ .

**Q11)** Application à une suite d'intégrales :

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit

$$J_n = \int_0^\pi \frac{1 - \cos(t) \cos\left(\frac{t}{3}\right) \dots \cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)}{t^2} dt$$

- Montrer que  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite bien définie et qu'elle est croissante et convergente. On posera  $a_k = \frac{1}{2k-1}$  et on exprimera l'espérance de  $|T_n|$  avec la méthode de la question II.A.4.
- Montrer que  $J_n = \frac{\pi}{2}$  pour  $1 \leq n \leq 7$  et que  $(J_n)_{n \geq 7}$  est strictement croissante.