Chap. R4 bonus : Différentes décompositions matricielles utiles

Les exercices suivants s'enchaînent en fait ici comme les questions d'un problème.

Exercice 1 (Décomposition $Q.R.$ traduction matricielle de Gram-Schmidt)**.** Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (Q, R) avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que

$$A = QR.$$

Indication – Pour l'existence, on pensera en terme de matrice de passage et de Gram-Schmidt.

Exercice 2 (Toute matrice Symétrique Positive est une matrice de Gram (et réciproquement))**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists\, M \ \in M_n(\mathbb{R}) \quad A = M^\top.M.$$

Rappel : $M^\top.M(i,j) = (C_i|C_j)$ cette matrice de p.s. s'appelle *matrice de Gram.*

Exercice 3 (Décomposition de Choleski)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.

Montrer qu'il existe une unique matrice B triangulaire inférieure à éléments diagonaux strictement positifs telle que $A = BB^\top$ ou encore une unique matrice triangulaire supérieure T à éléments diagonaux st. positifs telle que

$$A = T^\top T.$$

Indication pour l'existence : on peut utiliser les deux exercices précédents.

Exercice 4 (Application de décomposition de Choleski)**.** a) Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice symétrique réelle positive. Montrer que

$$0 \leq \det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Si A est définie positive, montrer aussi que l'égalité n'a lieu que si A est diagonale.

b) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, montrer l'inégalité de Hadamard suivante :

$$|\det(M)| \leq \prod_{j=1}^{n} ||C_j||$$

où $||C_j|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2}$.

Déterminer aussi la CNS d'égalité, et interprétation géométrique pour $n = 2$ ou $n = 3$?

Exercice 5 (Décomposition polaire de Cartan)**.** Montrer que tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique sous la forme $M = OS$ avec O orthogonale et S symétrique définie positive.
Remarque : Ce résultat est démontré (et utilisé) dans le D.M. 13

Exercice 6 (Jolie application de l'unicité dans Choleski pour un résultat sur l'action du groupe orthogonal)**.**

a) Soit M et M' deux matrices inversibles de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que ${}^tMM =^t M'M'$ si, et seulement si, il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $M' = OM$.

b) Interprétation géométrique : soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont deux familles libres de vecteurs d'un e.v. euclidien E ayant même matrice de Gram i.e.telle que pour tout (i,j), $(x_i|x_j) = (y_i|y_j)$.

Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{O}(E)$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(x_i) = y_i$.