Devoir surveillé 5 (4h)

Objectif et notations

Ce problème étudie l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x). \tag{1}$$

Cette équation modélise l'évolution au cours du temps de la température f le long d'une barre métallique unidimensionnelle. Le problème est constitué de trois parties :

— La partie I permet de démontrer quelques résultats sur la transformée de Fourier d'une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Ces résultats sont utilisés dans la partie II.

— La partie II aboutit à la résolution de l'équation (1) lorsqu'on impose à la solution f d'être de classe $\mathcal{C}^2$ et de vérifier certaines conditions.

— La partie III démontre l'injectivité de la transformée de Fourier utilisée à la partie II. Elle est indépendante de la partie II.

On désigne par $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto f(t,x)$ admettant des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ continues sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Pour toute fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, pour tout réel $t_0 > 0$, on note $h(t_0, \cdot)$ la fonction partielle $x \mapsto h(t_0, x)$ définie sur $\mathbb{R}$; de même, pour tout réel x_0, on note $h(\cdot, x_0)$ la fonction partielle $t \mapsto h(t, x_0)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leqslant b$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers k vérifiant $a \leqslant k \leqslant b$.

Pour tout réel $\sigma > 0, g_\sigma$ désigne la fonction gaussienne $g_\sigma : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right). \end{array} \right.$

I Préliminaires

Dans cette partie, on fixe un réel strictement positif σ.

Q 1) a) Montrer que g_σ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b) En admettant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, donner la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x) \mathrm{d}x$.

c) Étudier les variations de g_σ.

d) Montrer que la dérivée seconde de g_σ s'annule en changeant de signe en exactement deux points.

e) Donner l'allure de la courbe représentative de g_σ et placer les deux points précédents.

Q 2) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que, pour tout réel ζ, la fonction $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto f(x) \exp(-\mathrm{i}2\pi\zeta x) \end{array} \right.$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On définit alors la fonction $\mathcal{F}(f) : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \zeta \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-\mathrm{i}2\pi\zeta x) \mathrm{d}x \end{array} \right.$

On dit que $\mathcal{F}(f)$ est la transformée de Fourier de f.

b) Montrer que $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Q 3) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f et sa dérivée f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que f tend vers zéro en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Montrer que, pour tout réel ζ : $\mathcal{F}(f')(\zeta) = 2\mathrm{i}\pi\zeta\mathcal{F}(f)(\zeta)$.

Q 4) Calcul de la transformée de Fourier de g_σ par développement en série :

a) Montrer que, pour tout entier naturel p, la fonction $x \mapsto x^{2p}\exp\left(-x^2\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On note :

$$M_p = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\exp\left(-x^2\right)\mathrm{d}x.$$

b) Pour p entier naturel, donner une relation entre M_{p+1} et M_p et en déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$M_p = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}$$

c) Montrer que, pour tout réel ζ, il existe une suite réelle $\left(c_p(\zeta)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp\left(-x^2\right)\cos(2\pi\zeta x) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\zeta)\exp\left(-x^2\right)x^{2p}$$

d) En déduire que, pour tout réel ζ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2\right)\exp(-\mathrm{i}2\pi\zeta x)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\exp\left(-\pi^2\zeta^2\right).$$

e) On pose $\sigma' = \frac{1}{2\pi\sigma}$. Montrer qu'il existe un réel μ tel que $\mathcal{F}(g_\sigma) = \mu g_{\sigma'}$.

f) En déduire une valeur de σ pour laquelle g_σ est un *vecteur propre* de l'application $\mathcal{F}$ et préciser la valeur propre associée.

II Équation de diffusion avec une condition initiale gaussienne

On cherche les éléments f de $\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ vérifiant, pour $\sigma > 0$ fixé :

(i) l'équation de diffusion :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$$

(ii) les trois conditions de domination : pour tout réel $T > 0$, il existe des fonctions ϕ_T, χ_T et ψ_T de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et intégrables sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall t \in]0,T[, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} |f(t,x)| \leqslant \phi_T(x) \\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant \chi_T(x) \\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\right| \leqslant \psi_T(x) \end{cases}$$

(iii) la condition initiale en temps :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{t\to 0^+} f(t,x) = g_\sigma(x)$$

(autrement dit g_σ représente la répartition de température au temps 0).

Q 5) Montrer que la fonction $\left|\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (t,x) \mapsto g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x) \end{array}\right.$ vérifie les conditions i et iii. On admet que cette fonction vérifie également les trois conditions de domination ii.

L'objectif de ce qui suit est de démontrer que c'est *la seule fonction* de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vérifiant i, ii et iii.

Pour cela, **dans toute la suite de ce II, on note f une fonction qui vérifie i, ii et iii.**

Q 6) a) Justifier que, pour tout réel $t > 0$ et tout réel ζ, la fonction $x \mapsto f(t,x)\exp(-2\mathrm{i}\pi\zeta x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On définit alors la fonction $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$\forall (t,\zeta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(t,\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\zeta x)\mathrm{d}x.$$

Avec les notations de la partie I, on a ainsi, pour tout réel $t > 0, \widehat{f}(t,\cdot) = \mathcal{F}(f(t,\cdot))$.

b) Montrer que, pour tout nombre réel ζ ,

$$\lim_{t\to 0^+} \widehat{f}(t,\zeta) = \widehat{g_\sigma}(\zeta).$$

Q 7) a) Montrer que, pour tout réel ζ et tout réel $t > 0$,

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial t}(t,\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\exp(-i2\pi\zeta x)\mathrm{d}x.$$

b) En remarquant que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\zeta x)\mathrm{d}x = \mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)\right)(\zeta)$$

et en utilisant la Q 3) b), montrer que, pour tout réel ζ et tout réel $t > 0$,

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial t}(t,\zeta) = -4\pi^2\zeta^2\widehat{f}(t,\zeta).$$

c) Montrer que, pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$, il existe un réel $K(\zeta)$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\widehat{f}(t,\zeta) = K(\zeta)\exp\left(-4\pi^2\zeta^2 t\right).$$

Q 8) a) En utilisant la question 6)b) déterminer, pour tout réel ζ, la valeur de $K(\zeta)$.

b) En déduire l'existence d'un réel ν_σ dont on précisera la valeur, tel que, pour tout réel ζ et tout réel $t > 0$,

$$\widehat{f}(t,\zeta) = \nu_\sigma \exp\left(-2\pi^2\left(\sigma^2 + 2t\right)\zeta^2\right)$$

On admet dans la fin de ce II, le résultat suivant :

> **Théorème d'injectivité de la transformée de Fourier** : si u et v sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v)$, alors $u = v$.

Q 9) a) Soit t un réel strictement positif. Déduire des questions 8) b) et 4) e), l'existence d'un réel $\lambda_{t,\sigma}$ tel que

$$f(t,\cdot) = \lambda_{t,\sigma}\, g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}$$

b) Montrer que la fonction $I : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x \end{array}\right.$ est constante.

On pourra utiliser le résultat de la question 7) b).

c) Conclure enfin que, pour tout réel t strictement positif, $f(t,\cdot) = g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}$.

III Formule d'inversion et injectivité de la transformée de Fourier

Dans cette partie, on va démontrer le résultat admis à la fin de la partie II, avec des hypothèses un peu plus fortes, qui sont néanmoins suffisantes pour l'appliquer au II.

Attention : changement de notation

Pour simplifier les notations, on notera dans ce III, pour tout $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et tout $\zeta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f)(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-ix\zeta)dx,$$

autrement dit, on omet le facteur 2π qui apparaissait au I et II.

On utilisera librement (à la Q12) le théorème de Fubini suivant :

Théorème : Soit $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On suppose que F vérifie les trois conditions suivantes :

(H1) Pour tous réels x et y, les deux intégrales suivantes convergent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(v,y)| \mathrm{d}v \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} | F(x,t| \,\mathrm{d}t$$

(H2) Les fonctions $y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)| \mathrm{d}x$ et $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)| \mathrm{d}y$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

(H3) La fonction $y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)| \mathrm{d}x$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, i.e. on a la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)| \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Alors, les fonctions $y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y) \mathrm{d}x$ et $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y) \mathrm{d}y$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et leurs intégrales sur $\mathbb{R}$ sont égales, autrement dit on peut intervertir les deux intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Définitions :

Déf. 3.1. On appelle **produit de convolution** de f et g la fonction, notée $f * g$, définie, si elle existe, par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) \mathrm{d}t$$

On remarque que $f * g = g * f$ par changement de variable facile.

Déf. 3.2. Une **approximation de l'unité (de la convolution)** est une suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions suivantes :

— pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ est positive sur $\mathbb{R}$,

— pour tout $n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} u_n = 1$,

— pour tout $\delta > 0, \lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{-\delta} u_n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \int_{\delta}^{+\infty} u_n = 0$.

Q 10) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue bornée et (u_n) une approximation de l'unité, montrer que $(f * u_n)$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

Q 11) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction k_n par

$$k_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{n} & \text{si } |x| \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Exprimer la transformée de Fourier $\mathcal{F}(k_n)(\zeta)$ à l'aide de la fonction φ définie par

$$\varphi(\zeta) = \begin{cases} \left(\frac{\sin \zeta}{\zeta} \right)^2 & \text{si } \zeta \neq 0 \\ 1 & \text{si } \zeta = 0 \end{cases}$$

b) On admet que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$. En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi = \pi$.

c) On pose $K_n = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(k_n)$. Montrer que la suite de fonctions $(K_n)_{n \geqslant 1}$ est une approximation de l'unité.

Q 12) Soit f une fonction continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathcal{F}(f)$ soit continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(\zeta) \mathcal{F}(f)(-\zeta) \exp(-ix\zeta) \mathrm{d}\zeta$$

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $I_n(x) = (f * K_n)(x)$.

b) En déduire la **formule d'inversion de Fourier suivante :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\zeta) \exp(ix\zeta) \mathrm{d}\zeta.$$

Application à l'injectivité utilisée au II : Avec ce qui précède si u et v sont deux fonctions continues bornées intégrables telles que $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v)$ est une fonction continue intégrable, alors on a : $u = v$.