Devoir surveillé 5 : solution

Parties I et II : Centrale PC 2018

N.B. Le sujet de Centrale PC 2018 avait une partie III d'analyse numérique/algèbre linéaire et une partie IV de proba.

Q 1) a) Trois points à vérifier :

— fonction g_σ est continue sur $\mathbb{R}$, étant la composée de fonctions usuelles, en particulier continue par morceaux,

— D'après le théorème des croissances comparées,

$$x^2 g_\sigma(x) = \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Cela signifie que $g_\sigma(x) = \mathrm{o}\left(1/x^2\right)$ au voisinage de $+\infty$. Or la fonction $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ selon l'exemple de Riemann. D'après le théorème de comparaison pour les fonctions intégrables, g_σ est par conséquent intégrable en $+\infty$

— De même, en $-\infty$ par parité.

Les trois points précédentes montrent que $g_\sigma \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b) En effectuant le changement de variable $u = x/(\sigma\sqrt{2})$, qui s'inverse en $x = \sigma\sqrt{2}u$, ce qui donne $\mathrm{d}x = \sigma\sqrt{2}\ \mathrm{d}u$, on a, comme $\sigma > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-u^2\right)\sigma\sqrt{2}\ \mathrm{d}u \\
\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\ \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

dont on conclut que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\mathrm{d}x = 1$$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_\sigma'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \frac{-2x}{2\sigma^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) = -\frac{x}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$$

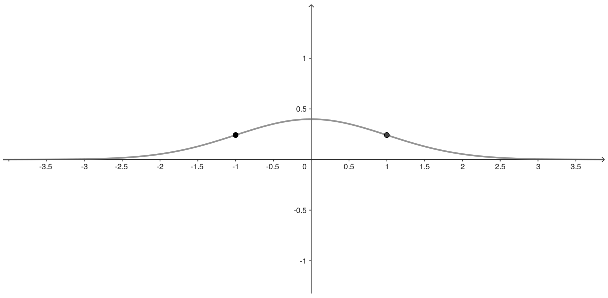
Pour tout $x \in \mathbb{R}, g_\sigma'(x)$ est du signe de $-x$ car l'exponentielle est toujours positive. La fonction g_σ croît donc sur $]-\infty; 0[$ et décroît sur $]0; +\infty[$.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
g_\sigma''(x) &= -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\left(1 \times \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) + x \times \frac{-2x}{2\sigma^2}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}\left(x^2 - \sigma^2\right)\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)
\end{aligned}$$

Celle-ci est du signe de $x^2 - \sigma^2$: elle est positive sur $]-\infty; -\sigma] \cup [\sigma; +\infty[$, négative sur $[-\sigma; \sigma]$ et s'annule en changeant de signe en $-\sigma$ et σ. Ces deux points sont donc les *points d'inflexion* de la gaussienne.

e) Outre les points d'inflexion, on remarque la tangente horizontale en 0.



Q 2) a) Soit $\xi \in \mathbb{R}$.

— La fonction $x \mapsto f(x)\exp(-i2\pi\xi x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ car f l'est et exp aussi.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}, |f(x)\exp(-i2\pi\xi x)| = |f(x)|$ et $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse.

Donc, la fonction $x \mapsto f(x)\exp(-i2\pi\xi x)$ est c.p.m. et majorée en module par une fonction intégrable, elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

b) Posons $h(x,\xi) = f(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)$ pour tous $x, \xi \in \mathbb{R}$, et appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

— Pour tout $\xi \in \mathbb{R}, x \mapsto h(x,\xi)$ est continue par morceaux (et même continue).

— Pour tout $x \in \mathbb{R}, \xi \mapsto h(x,\xi)$ est continue.

— Pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^2, |h(x,\xi)| = |f(x)|$ et cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent La fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Q 3) a) Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, on sait, par théorème fondamental que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$$

Comme f' est intégrable sur $\mathbb{R}$, cette intégrale converge lorsque x tend vers $+\infty$. Ainsi, f possède une limite finie ℓ en $+\infty$, et par continuité de la valeur absolue,

$$|f(x)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} |\ell|$$

Par l'absurde, si $\ell \neq 0$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \geqslant |\ell|/2$ pour tout $x \geqslant a$. Alors,

$$\forall x \geqslant a \quad \int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x \frac{|\ell|}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{|\ell|}{2}(x-a)$$

$$\text{Or } \frac{|\ell|}{2}(x-a) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

car on a supposé $\ell \neq 0$, donc par comparaison :

$$\int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

ce qui contredit l'intégrabilité de f. Par conséquent $\ell = 0$, et la fonction f tend vers 0 en $+\infty$. On prouve de même que la fonction f tend vers 0 en $-\infty$.

b) Par définition, pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\exp(-i2\pi\xi x)dx$$

On envisage l'I.P.P. suivante $\begin{cases} u'(x) = f'(x) \Leftarrow u(x) = f(x) \\ v(x) = \exp(-i2\pi\xi x) \Rightarrow v'(x) = -2i\pi\xi\exp(-i2\pi\xi x) \end{cases}$

Le terme de bord $u(x)v(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ car $|u(x)v(x)| = |f(x)|$ et on utilise le a).

Donc l'I.P.P est possible dans l'intégrale généralisée :

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = [f(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} 2\mathrm{i}\pi\xi f(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)\mathrm{d}x$$

Le crochet étant nul, on conclut que

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = 2\mathrm{i}\pi\xi\mathcal{F}(f)(\xi) \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}$$

Q 4) a) Soit $p \in \mathbb{N}$.

— La fonction $x \mapsto x^{2p}\exp\left(-x^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$

— par le théorème des croissances comparées,

$$x^2 x^{2p}\exp\left(-x^2\right) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$$

donc $x^{2p}\exp\left(-x^2\right) = o(1/x^2)$ et on conclut comme au 1) a) par comparaison à l'exemple de Riemann à l'intégrabilité au voisinage de $\pm\infty$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Dans M_p on envisage une I.P.P.
La quantité $x^{2p+1}\exp\left(-x^2\right)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$ d'après le théorème des croissances comparées. On peut donc effectuer l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned}
M_p &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\exp\left(-x^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1}\exp\left(-x^2\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2p+1}}{2p+1}(-2x)\exp\left(-x^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{2p+1}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2(p+1)}\exp\left(-x^2\right)\mathrm{d}x \\
M_p &= \frac{2}{2p+1}M_{p+1}
\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \mathrm{M}_{p+1} = \frac{2p+1}{2}\mathrm{M}_p$$

Montrons maintenant par récurrence que la propriété :

$$\mathscr{P}(p) : \mathrm{M}_p = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}$$

est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

— $\mathscr{P}(0)$ est vraie : en effet $\mathrm{M}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ d'après le résultat fourni au début de l'énoncé.

— Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(p)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{p+1} &= \frac{2p+1}{2}\mathrm{M}_p \\
&= \frac{2p+1}{2}\frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}(2p+1)!}{2^{2p+1}p!}\frac{2p+2}{2p+2} \\
\mathrm{M}_{p+1} &= \frac{\sqrt{\pi}(2(p+1))!}{2^{2(p+1)}(p+1)!}
\end{aligned}$$

d'après $\mathscr{P}(p)$

ce qui prouve que $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.

La récurrence est établie.

c) Soit $\xi \in \mathbb{R}$. La fonction cosinus est développable en série entière autour de 0 avec un rayon de convergence infini, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2\pi\xi x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!}(2\pi\xi x)^{2p}$$

d'où

$$\exp\left(-x^2\right)\cos(2\pi\xi x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p(2\pi\xi)^{2p}}{(2p)!}\exp\left(-x^2\right)x^{2p}$$

Si on pose, pour tout $p \in \mathbb{N}, c_p(\xi) = \frac{(-1)^p(2\pi\xi)^{2p}}{(2p)!}$, on a bien pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\exp\left(-x^2\right)\cos(2\pi\xi x) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi)\exp\left(-x^2\right)x^{2p}$$

d) Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On a déjà vu que les fonctions $x \mapsto \exp\left(-x^2\right)$ et $x \mapsto \exp\left(-x^2\right)\exp(-i2\pi\xi x)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. L'intégrabilité d'une fonction équivaut à celle de sa partie réelle et de sa partie imaginaire donc on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)\exp(-2i\pi\xi x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)\cos(-2\pi\xi x)dx + i\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)\sin(-2\pi\xi x)dx$$

La fonction $x \mapsto \exp\left(-x^2\right)\sin(-2\pi\xi x)$ étant impaire, la seconde intégrale est nulle et par parité de la fonction cos,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)\exp(-i2\pi\xi x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)\cos(2\pi\xi x)dx$$

D'après la question précédente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)\cos(2\pi\xi x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p(2\pi\xi)^{2p}}{(2p)!}x^{2p}dx$$

Justifions la permutation de la somme et de l'intégrale. Posons, pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$u_p(x) = \exp\left(-x^2\right)\frac{(-1)^p(2\pi\xi)^{2p}}{(2p)!}x^{2p}$$

On sait déjà que la série de fonctions $\sum_{p\in\mathbb{N}} u_p$ converge simplement et sa somme est la fonction continue

$$x \mapsto \exp\left(-x^2\right)\cos(2\pi\xi x)$$

Il reste à montrer que la série de terme général

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\exp\left(-x^2\right)\frac{(-1)^p(2\pi\xi)^{2p}}{(2p)!}x^{2p}\right|dx$$

est convergente. Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\exp\left(-x^2\right)\frac{(-1)^p(2\pi\xi)^{2p}}{(2p)!}x^{2p}\right|\mathrm{d}x &= \frac{(2\pi\xi)^{2p}}{(2p)!}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2p}\exp\left(-x^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{(2\pi\xi)^{2p}}{(2p)!}\mathrm{M}_p \\ &= \frac{(2\pi\xi)^{2p}}{(2p)!}\frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\exp\left(-x^2\right)\frac{(-1)^p(2\pi\xi)^{2p}}{(2p)!}x^{2p}\right|\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\frac{\left(\pi^2\xi^2\right)^p}{p!}$$

On reconnaît à droite le terme général du développement en série entière en 0 de la fonction $\xi \mapsto \sqrt{\pi}\exp\left(\pi^2\xi^2\right)$, lequel est de rayon de convergence infini. Cela suffit pour assurer la convergence, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, de la série

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} \sqrt{\pi}\frac{\left(\pi^2\xi^2\right)^p}{p!}$$

' On peut par conséquent intervertir la somme et l'intégrale. Cela donne

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2\right)\cos(2\pi\xi x)\mathrm{d}x &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p(2\pi\xi)^{2p}}{(2p)!}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\exp\left(-x^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p(2\pi\xi)^{2p}}{(2p)!}\frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!} \\
&= \sqrt{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\left(-\pi^2\xi^2\right)^p}{p!} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2\right)\cos(2\pi\xi x)\mathrm{d}x &= \sqrt{\pi}\exp\left(-\pi^2\xi^2\right)
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2\right)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\exp\left(-\pi^2\xi^2\right)$$

N.B. On a ici démontré que la transformée de Fourier de la fonction "gaussienne" $x \mapsto \exp\left(-x^2\right)$ est également une fonction "gaussienne". Ce résultat peut s'obtenir d'une autre manière, plus rapide !, qui constitue un exercice classique. En posant

$$\mathrm{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2\right)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)\mathrm{d}x$$

on peut montrer (après avoir justifié proprement sa dérivabilité) que F vérifie l'équation différentielle

$$\mathrm{F}'(\xi) + 2\pi^2\xi\ \mathrm{F}(\xi) = 0$$

Sa résolution (avec la condition initiale $\mathrm{F}(0) = \sqrt{\pi}$) permet de retrouver l'expression obtenue précédemment.

e) Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On a

$$\mathcal{F}\left(g_\sigma\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)\mathrm{d}x$$

Effectuons le changement de variable $u = x/(\sigma\sqrt{2})$ comme à la question 1) b). Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(g_\sigma\right)(\xi) &= \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-u^2\right)\exp(-i2\pi(\xi\sigma\sqrt{2})u)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}\exp\left(-\pi^2(\sigma\xi\sqrt{2})^2\right) \qquad \text{d'après la question précédente} \\
\mathcal{F}\left(g_\sigma\right)(\xi) &= \exp\left(-2\pi^2\sigma^2\xi^2\right)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\quad g_{\sigma'}(\xi) = \frac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma'^2}\right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}/(2\pi\sigma)}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2/(2\pi\sigma)^2}\right) \\
g_{\sigma'}(\xi) &= \sigma\sqrt{2\pi}\exp\left(-2\pi^2\sigma^2\xi^2\right)
\end{aligned}$$

En posant $\mu = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})$, on en déduit que

$$\text{Il existe } \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } \mathcal{F}\left(g_\sigma\right) = \mu g_{\sigma'}$$

f) Pour $\sigma = 1/\sqrt{2\pi}$, on a $\sigma' = \sigma$ et g_σ est un *vecteur propre* de $\mathcal{F}$ pour la valeur propre 1 : g_σ est égale à sa transformée de Fourier, ce qui est un résultat important.

Q 5) Posons, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$\mathrm{B}(t,x) = g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sigma^2+2t\right)^{-1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2+4t}\right)$$

- Montrons que la fonction B satisfait (i). Étant le produit et la composée de fonctions usuelles, elle admet des dérivées partielles en tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t}(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{2}{2}\left(\sigma^2+2t\right)^{-3/2} + \left(\sigma^2+2t\right)^{-1/2}\frac{4x^2}{(2\sigma^2+4t)^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2+4t}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(\sigma^2+2t)^{5/2}}\left(x^2-\left(\sigma^2+2t\right)\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2+4t}\right) \quad (1)\end{aligned}$$

Par ailleurs, si t est fixé, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathrm{B}}{\partial x^2}(t,x) &= g''_{\sqrt{\pi+2t}}(x)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(\sigma^2+2t)^{5/2}}\left(x^2-\left(\sigma^2+2t\right)\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2+4t}\right) \quad (2)\end{aligned}$$

en remplaçant σ par $\sqrt{\sigma^2+2t}$ dans le résultat du calcul de la question 1) c).
En comparant (1) et (2), on a bien

$$\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 \mathrm{B}}{\partial x^2}(t,x)$$

-Montrons que B **satisfait (iii) :** pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\mathrm{B}(\cdot,x)$ est la composée de fonctions continues en 0 , elle est donc continue en 0 , d'où

$$\mathrm{B}(t,x) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \mathrm{B}(0,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = g_\sigma(x)$$

ce qui signifie que la condition (iii) est également satisfaite.

Q 6) a) Soient $t > 0, \xi \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{T} > t$ de sorte que $t \in]0;\mathrm{T}[$. Alors :

— la fonction $x \mapsto f(t,x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,

— pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)| = |f(t,x)| \leqslant \phi_{\mathrm{T}}(x)$$

avec ϕ_{T} est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On en déduit bien que la fonction $x \mapsto f(t,x)\exp(-i2\pi\xi x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Pour tout $t > 0$,

$$\widehat{f}(t,\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)\mathrm{d}x$$

On souhaite appliquer le théorème de convergence dominée, à paramètre continu.
On fixe un $T > 0$ et on considère la fonction ; $t \in]0,T[\mapsto \widehat{f}(t,\xi)$.

— on sait que $\forall\, x \ \in \mathbb{R},\ f(t,\xi)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} g_\sigma(x)\exp(-i2\pi\xi x)$

— on sait aussi que :

$$\forall\, t \in]0,T[, |f(t,\xi)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)| = |f(t,\xi)| \le \Phi_T(x)$$

avec Φ_T intégrable indépendante de t.

Donc le théorème de convergence dominée à paramètre continu s'applique :

$$\widehat{f}(t,\xi) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\exp(-i2\pi\xi x)dx. = \widehat{g_\sigma}(\xi).$$

Q 7) a) Soient $\xi \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{T} > 0$. Posons, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$\varphi(t,x) = f(t,x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)$$

et appliquons le théorème sur le caractère $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre à la fonction $\widehat{f}(\cdot,\xi)$ sur l'intervalle $]0;\mathrm{T}[$.

(H0) Pour tout $t > 0, x \mapsto \varphi(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la question 6) a)

(H1) Pour tout $x \in \mathbb{R}, t \mapsto \varphi(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)$$

et pour tout $t > 0, x \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(H2) Pour tout $(t,x) \in]0;\mathrm{T}[\times\mathbb{R}$, d'après (i) et (ii),

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\right| \leqslant \psi_{\mathrm{T}}(x)$$

avec ψ_T intégrable, indépendante de $t \in]0,T[$.

La fonction $\widehat{f}$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;\mathrm{T}[$ pour tout $\mathrm{T} > 0$, c'est-à-dire qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall t > 0,\quad \frac{\partial\hat{f}}{\partial t}(t,\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\exp(-i2\pi\xi x)\mathrm{d}x$$

b) Soient $\xi \in \mathbb{R}, t > 0$ et $\mathrm{T} > t$. Les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,\cdot) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\cdot)$$

sont continues sur $\mathbb{R}$ car f est de classe $\mathcal{C}^2$, et d'après (ii), elles sont aussi intégrables sur $\mathbb{R}$ car dominées respectivement par les fonctions intégrables χ_{T} et ψ_{T} donc les transformées de Fourier de ces deux fonctions sont bien définies. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\widehat{f}}{\partial t}(t,\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\exp(-i2\pi\xi x)\mathrm{d}x \quad \text{par a)}\\
&= \mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)\right)(\xi) \quad \text{par déf.,}\\
&= \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\cdot)\right)(\xi) \quad \text{par la condition i}\\
&= 2\mathrm{i}\pi\xi\,\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,\cdot)\right)(\xi) \quad \text{d'après la question 3) b)}\\
&= (2\mathrm{i}\pi\xi)^2\,\mathcal{F}(f(t,\cdot))(\xi) \quad \text{toujours d'après la question 3) b)}\\
&= -4\pi^2\xi^2\widehat{f}(t,\xi) \quad \text{c.q.f.d.}
\end{aligned}$$

c) Soit $\xi \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, la fonction $t \mapsto \widehat{f}(t,\xi)$ vérifie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants

$$y' + 4\pi^2\xi^2 y = 0$$

donc il existe une constante $\mathrm{K}(\xi)$ telle que pour tout $t > 0, \widehat{f}(t,\xi) = \mathrm{K}(\xi)\exp\left(-4\pi^2\xi^2 t\right)$.

Q 8) a) D'une part, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, par continuité de exp :

$$\widehat{f}(t,\xi) = \mathrm{K}(\xi)\exp\left(-4\pi^2\xi^2 t\right) \xrightarrow[t\to 0^+]{} \mathrm{K}(\xi). \tag{1}$$

D'autre part, d'après la question 6) c), pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\widehat{f}(t,\xi) \xrightarrow[t\to 0^+]{} \widehat{g_\sigma}(\xi). \tag{2}$$

Enfin, on a vu à la question 4) e), que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{g_\sigma}(\xi) = \exp\left(-2\pi^2\sigma^2\xi^2\right). \tag{3}$$

Par unicité de la limite, avec $(1),(2),3)$, on conclut que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$K(\xi) = \exp\left(-2\pi^2\sigma^2\xi^2\right).$$

b) Il suit des questions précédentes que, pour tous $\xi \in \mathbb{R}$ et $t > 0$,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(t,\xi) &= K(\xi)\exp\left(-4\pi^2\xi^2 t\right)\\ &= \exp\left(-2\pi^2\sigma^2\xi^2\right)\exp\left(-4\pi^2\xi^2 t\right)\\ &= \exp\left(-2\pi^2\left(\sigma^2+2t\right)\xi^2\right)\end{aligned}$$

d'où la conclusion demandée avec tout simplement $\nu_\sigma = 1$.

Scholie A ce stade, on a prouvé que pour f vérifiant i,ii, iii, sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ était déterminée de façon unique. La question qui reste permet de revenir de $\widehat{f}$ à f.

Q 9) a) On a prouvé à la fin de la partie I que, pour tout $\sigma > 0$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\widehat{g_\sigma} = \mu g_{\frac{1}{2\pi\sigma}}.$$

En remplaçant σ par $\sqrt{\sigma^2+2t}$: il existe $\mu_{t,\sigma} \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{g}_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(\xi) = \mu_{t,\sigma}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\frac{1}{\left(2\pi\sqrt{\sigma^2+2t}\right)^2}}\right) = \mu_{t,\sigma}\exp\left(-2\pi^2\left(\sigma^2+2t\right)\xi^2\right)$$

c'est-à-dire que

$$\widehat{g}_{\sqrt{\sigma^2+2t}} = \mu_{t,\sigma}\widehat{f}(t,\cdot)$$

Mais par linéarité de l'intégrale et donc de la transformée de Fourier, ce résultat se réécrit :

$$\mathcal{F}\left(g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}\right) = \mathcal{F}\left(\mu_{t,\sigma}f(t,\cdot)\right).$$

Par le théorème d'injectivité de $\mathcal{F}$ donné dans l'énoncé, on obtient l'égalité de fonctions :

$$g_{\sqrt{\sigma^2+2t}} = \mu_{t,\sigma}f(t,\cdot).$$

En outre, $\mu_{t,\sigma} \neq 0$ puisque $g_{\sqrt{\sigma^2+2t}} > 0$. En posant $\lambda_{t,\sigma} = 1/\mu_{t,\sigma}$, il vient finalement

$$f(t,\cdot) = \lambda_{t,\sigma}g\sqrt{\sigma^2+2t}$$

b) Remarquons que $\mathrm{I}(t) = \widehat{f}(t,0)$ pour tout $t > 0$. Le résultat de la question 7 b) prouve que la fonction I est dérivable avec pour tout $t > 0$,

$$\mathrm{I}'(t) = \frac{\partial\widehat{f}}{\partial t}(t,0) = -4\pi^2\times 0^2\widehat{f}(t,0) = 0$$

La dérivée de I est identiquement nulle, par conséquent la fonction I est constante sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

c) Les fonctions $f(t,\cdot)$ et $g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}$ étant intégrables sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $t>0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x = \lambda_{t,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x)\mathrm{d}x = \lambda_{t,\sigma}$$

en se rappelant que d'après la question 1) b) ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Autrement dit, avec la notation du b)

$$\forall\, t>0,\ \lambda_{t,\sigma} = \mathrm{I}(t)$$

et la fonction I étant constante,

$$\lambda_{t,\sigma} = \lim_{t\to 0^+}\mathrm{I}(t) = \lim_{t\to 0^+}\widehat{f}(t,0) = \widehat{g_\sigma}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\mathrm{d}x = 1$$

où on a également appliqué le résultat de la question 6) b). Par conséquent,

$$\forall\, t>0, f(t,\cdot) = g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}$$

est l'unique solution à l'équation de la chaleur pour la condition initiale gaussienne g_σ.

Partie III : formule d'inversion de Fourier

Q 10) Question faite en T.D où on avait commencé par le faire pour $x=0$ puis un changement de variable.

Ici, on reprend la même rédaction pour x quelconque Soit $x\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon>0$.

$$\begin{aligned}(f*u_n)(x)-f(x) &= (u_n*f)(x)-f(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} u_n(t)(f(x-t)-f(x))\mathrm{d}t\end{aligned}$$

La fonction f est continue au point x, donc il existe $\delta>0$ tel que $|f(x-t)-f(x)|\leqslant\varepsilon$ pour tout $t\in[-\delta,\delta]$. En utilisant l'inégalité triangulaire et la positivité de l'intégrale, on obtient alors

$$\begin{aligned}|(u_n*f)(x)-f(x)| \leqslant &\int_{-\infty}^{-\delta} u_n(t)|f(x-t)-f(x)|\mathrm{d}t\\ &+\int_{-\delta}^{\delta}\varepsilon u_n(t)\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{+\infty} u_n(t)|f(x-t)-f(x)|dt \quad (\dagger)\end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_{-\infty}^{-\delta} u_n(t)|f(x-t)-f(x)|\mathrm{d}t \leqslant 2\|f\|_\infty\int_{-\infty}^{-\delta} u_n(t)\mathrm{d}t$$

par définition de l'approximation de l'unité, on obtient donc par majoration que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{-\delta} u_n(t)|f(x-t)-f(x)|\mathrm{d}t = 0$$

et de même :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\delta}^{+\infty} u_n(t)|f(x-t)-f(x)|\mathrm{d}t = 0$$

Ainsi, avec $(\dagger)$ il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, on a

$$|(u_n*f)(x)-f(x)| \leqslant 2\varepsilon+\varepsilon\int_{-\delta}^{\delta} u_n(t)\mathrm{d}t \leq 3\varepsilon \quad (\ddagger)$$

la dernière inégalité étant obtenue en majorant $\int_{-\delta}^{\delta} u_n(t)\mathrm{d}t$ par $\int_{\mathbb{R}} u_n = 1$ puisque $u_n\geq 0$.s

La majoration $(\ddagger)$ donne la conclusion $(f*u_n)(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

Q 11) a) Si $x \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(k_n)(x) &= \int_{-n}^{n}\left(1-\frac{|t|}{n}\right)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)\left(e^{-ixt}+e^{ixt}\right)\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)\cos(xt)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

et une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(k_n)(x) &= 2\left[\left(1-\frac{t}{n}\right)\frac{\sin(xt)}{x}\right]_0^n + \frac{2}{nx}\int_0^n \sin(xt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{nx}\left[-\frac{\cos(xt)}{x}\right]_0^n \\
&= \frac{2}{nx^2}(1-\cos(nx))
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(k_n)(x) &= \frac{4}{nx^2}\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right) \\
&= n\varphi\left(\frac{nx}{2}\right)
\end{aligned}$$

Si $x = 0$, alors

$$\mathcal{F}(k_n)(x) = 2\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t = n.$$

En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(k_n)(x) = n\varphi\left(\frac{nx}{2}\right).$$

b) *Idée :* On relie les deux avec une I.P.P à partir de I pour avoir le t^2 en bas, après un peu de trigonométrie nous donnera de $\sin^2(t)$ en haut.

Soit $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt$. Avec une I.P.P. : $\begin{cases} u(t) = 1/t \Rightarrow u'(t) = -1/t^2, \\ v'(t) = \sin(t) \Leftarrow v(t) = 1-\cos(t) \end{cases}$ (il est important de prendre la primitive qui s'annule en zéro pour ne pas créer une explosion en zéro).

Alors $I(x) = \left[\dfrac{1-\cos(t)}{t}\right]_0^x + \displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt.$

En écrivant $1-\cos(t) = 2\sin^2(t/2)$ dans l'intégrale de droite et en faisant tendre x vers l'infini, on a $I = 0 + \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}dt.$

Par changement de variable $u = t/2$, et parité on a la conclusion. □

c) (cf T.D. sur Weierstrass pour cette question aussi).

L'application φ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty, |\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{x^2}$, donc φ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction K_n est positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. En utilisant le changement de variable $u = \frac{nx}{2}$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(x)\mathrm{d}x = \frac{n}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi\left(\frac{nx}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(u)\mathrm{d}u = 1$$

De même, si δ est un réel strictement positif donné, alors

$$\int_\delta^{+\infty} K_n(x)\mathrm{d}x = \frac{n}{2\pi}\int_\delta^{+\infty}\varphi\left(\frac{nx}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{n\delta/2}^{+\infty}\varphi(u)\mathrm{d}u$$

La fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\delta}{2} = +\infty$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{n\delta/2}^{+\infty} \varphi(u)\mathrm{d}u = 0$$

et il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\delta}^{+\infty} K_n(x)\mathrm{d}x = 0$$

De même, on montre que $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{-\delta} K_n(x)\mathrm{d}x = 0$, ce qui prouve que $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité.

Q 12) a) La fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue et k_n est nulle en dehors du segment $[-,n,n]$ donc $I_n(x)$ a bien un sens en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[-n,n]$ et l'on a

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} k_n(\zeta)\left(\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{i\zeta y}\ \mathrm{d}y\right)e^{-ix\zeta}\ \mathrm{d}\zeta$$

L'application $(\zeta, y) \mapsto k_n(\zeta)f(y)e^{i\zeta(y-x)}$ est continue, ainsi que l'application

$$\zeta \mapsto k_n(\zeta)\left(\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{i\zeta y}\ \mathrm{d}y\right)e^{-ix\zeta}$$

et le théorème de Fubini montre que

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} k_n(\zeta)f(y)e^{i\zeta(y-x)}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} k_n(\zeta)f(y)e^{i\zeta(y-x)}\mathrm{d}\zeta\right)\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}} k_n(\zeta)e^{i\zeta(y-x)}\mathrm{d}\zeta\right)\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(y)\mathcal{F}(k_n)(x-y)dy \\
&= (f * K_n)(x).
\end{aligned}$$

b) La suite $(K_n)_{n\geqslant 1}$ est une approximation de l'unité, ce qui assure qu'à x fixé,

$$\lim_{n\to+\infty} (f * K_n)(x) = f(x). \tag{1}$$

Par ailleurs, la suite de fonctions continues $(j_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$j_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi}k_n(\zeta)\mathcal{F}(f)(-\zeta)e^{-ix\zeta}$$

converge simplement vers la fonction (elle aussi continue)

$$j : \zeta \mapsto \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(f)(-\zeta)e^{-ix\zeta}$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\zeta \in \mathbb{R}$, on a l'hypothèse de domination

$$|j_n(\zeta)| \leqslant \frac{1}{2\pi}|\mathcal{F}(f)(-\zeta)|$$

et $\mathcal{F}(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(-\zeta)e^{-ix\zeta}\ \mathrm{d}\zeta$$

soit, avec le changement de variable $y = -\zeta$,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(y)e^{ixy}\ \mathrm{d}y \tag{2}$$

Par unicité de la limite, avec (1) et (2) on obtient donc la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\zeta)e^{ix\zeta}\ \mathrm{d}\zeta$$