

D.M. 9 : transformation de Laplace, d'après Centrale PSI 2012

La fin du sujet a été modifiée pour mieux mettre en valeur les idées de la théorie de Sturm-Liouville

Q1) L'intégrabilité de $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ signifie la convergence absolue de l'intégrale, qui elle-même entraîne la convergence de l'intégrale et on a donc

$$E \subset E'.$$

Q2) a) Si $x \in E$ et si $y \geq x$ alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, |f(t)e^{-\lambda(t)y}| = |f(t)|e^{-\lambda(t)y} \leq |f(t)|e^{-\lambda(t)x}$$

car $\lambda(t) \geq 0$ et, le majorant étant intégrable sur \mathbb{R}^+ , on a $y \in E$. On vient donc de voir que

$$\forall x \in E, [x, +\infty[\subset E$$

Cette propriété suffit pour montrer que E est un intervalle de \mathbb{R} , non majoré, mais détaillons l'argument :

On suppose désormais E non vide et on distingue deux cas :

- Si E n'est pas minoré ; pour tout réel y il existe $x \in E$ tel que $x \leq y$ et ce qui précède indique que $y \in E$. On a donc

$$E = \mathbb{R}$$

- Si E est minoré, étant non vide il possède une borne inférieure α et $E \subset [\alpha, +\infty[$. Par ailleurs, si $y > \alpha$ alors (caractérisation de la borne inférieure) il existe $x \in E$ tel que $x \leq y$ et ainsi $y \in E$. On a prouvé que

$$]\alpha, +\infty[\subset E \subset [\alpha, +\infty[$$

et E est égal à l'un des intervalles $]\alpha, +\infty[$ ou $[\alpha, +\infty[$.

b) Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- $\forall x \in E, t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est continue sur \mathbb{R}^+ , en particulier c.p.m.,
- $\forall t \geq 0, x \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est continue sur E .
- $\forall [a, b] \subset E, \forall x \in [a, b], \forall t \geq 0, |f(t)e^{-\lambda(t)x}| \leq |f(t)|e^{-\lambda(t)a}$. Le majorant est indépendant de x et est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Le théorème s'applique et donne

$$Lf \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$$

Q3) Avec l'hypothèse commune que f est c.p.m. sur $]0, +\infty[$, l'intégrabilité de $g : t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ sur I correspondant à la convergence de l'intégrale de $|g|$ sur I , si f est positive alors $|g| = g$ et donc $E = E'$.

Q4) Remarque : Dans les trois cas proposés, la fonction f est positive (au a) cela découle de la croissance de λ donnée au début de l'énoncé). On peut donc indifféremment étudier la convergence de l'intégrale (i.e. l'existence d'une limite de $\int_0^a f(t)e^{-\lambda(t)x} dt$ quand $a \rightarrow +\infty$) ou l'intégrabilité (au voisinage de $+\infty$ car les fonctions sont continues sur \mathbb{R}^+ et $+\infty$ est donc le seul problème).

a) Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On a

$$\forall x \neq 0, \int_0^a \lambda'(t)e^{-\lambda(t)x} dt = \left[-\frac{1}{x} e^{-\lambda(t)x} \right]_{t=0}^{t=a} = \frac{e^{-\lambda(0)x} - e^{-\lambda(a)x}}{x}$$

Comme λ croissante et non majorée, $\lambda(a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} +\infty$ et ainsi

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \lambda'(t) e^{-\lambda(t)x} dt &= \frac{e^{-\lambda(0)x}}{x} \\ \forall x < 0, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \lambda'(t) e^{-\lambda(t)x} dt &= +\infty \end{aligned}$$

Enfin si $x = 0$ alors

$$\int_0^a \lambda'(t) dt = \lambda(a) - \lambda(0) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On a donc montré que

$$E = E' = \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \forall x > 0, Lf(x) = \frac{e^{-\lambda(0)x}}{x}$$

- b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\forall t \geq \max(x, 0), f(t)e^{-\lambda(t)x} = e^{\lambda(t)(t-x)} \geq 1$. On n'a donc pas intégrabilité au voisinage de $+\infty$ et

$$E = \emptyset$$

- c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\forall t \geq \max(-x, 0), 0 \leq f(t)e^{-\lambda(t)x} = \frac{e^{-\lambda(t)(x+t)}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$. Le majorant étant intégrable, on a $x \in E$. Ainsi

$$E = E' = \mathbb{R}$$

Q5) Il s'agit d'étudier la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

- a) Si $x \geq 0$ alors $0 \leq \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ qui est intégrable sur \mathbb{R}^+ . On a donc $x \in E$.

Si $x < 0, t \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$ donc n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$

$$E = \mathbb{R}^+$$

On a immédiatement (arctan étant une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ sur \mathbb{R})

$$Lf(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

- b) Il s'agit d'utiliser le théorème sur le caractère C^1 des intégrales à paramètres.

- $\forall x > 0, \forall t \geq 0, t \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .
- $\forall t \geq 0, x \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^{+*} de dérivée $x \mapsto -\frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$.
- $\forall x > 0, t \mapsto -\frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur \mathbb{R}^+ .
- On a

$$\forall a > 0, \quad \forall x \geq a, \forall t \geq 0, \left| -\frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} \right| \leq \frac{t^2}{1+t^2} e^{-at^2} = \psi(t)$$

ψ est continue sur \mathbb{R}^+ et négligeable devant $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ (car $a > 0$); c'est donc une fonction intégrable sur \mathbb{R}^+

. Le cours indique alors que Lf est de classe C^1 sur \mathbb{R}^{+*} avec

$$\forall x > 0, (Lf)'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt^2} dt$$

Remarque : on ne sait rien quant à la dérivabilité en 0 et on ne s'en occupera que si cela s'avère utile dans la suite.

- c) On en déduit que

$$\forall x > 0, Lf(x) - (Lf)'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = \frac{A}{\sqrt{x}} \text{ avec } A = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

la dernière égalité provenant du changement de variable $u = t\sqrt{x}$.

Remarque : Lf étant continue en 0, on a donc $(Lf)'(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$. Par théorème de limite de la dérivée (avec $Lf \in C^0(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}^{++})$), on peut en déduire que Lf n'est PAS dérivable en 0 mais que son graphe présente en $(0, \pi/2)$ une demi-tangente verticale.

- d) **N.B.** Introduire g c'est résoudre l'E.D. en multipliant par une exponentielle pour faire apparaître une dérivée.

La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}^{++} et

$$\forall x > 0, g'(x) = e^{-x} ((Lf)'(x) - Lf(x)) = -A \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ est continue sur \mathbb{R}^{++} et le théorème fondamental indique que $x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ en est une primitive sur \mathbb{R} . Deux primitives sur un intervalle différent d'une constante, donc

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x > 0, g(x) = c - A \int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

Par ailleurs, g est continue en 0 car Lf l'est par Q2 b) et $g(0) = \frac{\pi}{2}$ par a).

On en déduit que l'on peut passer à la limite dans l'égalité ci-dessus et on obtient

$$c = \frac{\pi}{2} + A \int_1^0 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

Finalement, on a

$$\forall x > 0, g(x) = \frac{\pi}{2} - A \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

et l'égalité reste vraie en $x = 0$ (elle se lit $g(0) = \pi/2$).

- e) Remarquons que

$$\forall x \geq 0, 0 \leq g(x) \leq e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Donc par encadrement $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

En faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'identité de la question précédente, on obtient donc

$$A \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{\pi}{2} \quad (*)$$

Par ailleurs, le changement de variable $u = \sqrt{t}$ (licite car $t \mapsto \sqrt{t}$ est un C^1 difféomorphisme de $]0, +\infty[$ dans lui-même) donne

$$\forall x > 0, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \quad (1)$$

Or à la question c), on avait vu que :

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \quad (2)$$

Avec (1) et (2) dans (*), on obtient que :

$$2A^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Et finalement, comme $A \geq 0$ comme intégrale d'une fonction positive :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Q6) Comme $e^t - 1 \sim_0 t$, on a, $\frac{t}{e^t - 1} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$ et donc $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ par somme de limites. La fonction f est donc prolongeable par continuité en posant

$$f(0) = 0.$$

Q7) Soit $x \in \mathbb{R}$.

D'une part, la fonction $g : t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur \mathbb{R}^+ par Q6, d'autre part :

$$g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t}{2} e^{-xt} \quad (*)$$

car $f(t) \sim_{+\infty} t/2$ terme prépondérant de la somme définissant f .

Si $x > 0$, $(*)$ montre que g est intégrable au voisinage de $+\infty$ (négligeable devant $1/t^2$).

Si $x \leq 0$, g est non intégrable au voisinage de $+\infty$ car de limite infinie. Ainsi

$$E = \mathbb{R}^{+*}$$

Q8) Par définition, on a

$$\forall x > 0, Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$$

Par ailleurs, pour $t > 0$ on a $e^{-t} \in [0, 1[$ et donc

$$\forall t > 0, f(t) = te^{-t} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kt} - 1 + \frac{t}{2}$$

Les fonctions $t \mapsto e^{-xt}$ et $t \mapsto te^{-xt}$ étant intégrables sur \mathbb{R}^+ pour $x > 0$, on peut découper $Lf(x)$ en trois morceaux pour $x > 0$ et obtenir

$$\forall x > 0, Lf(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} te^{-(k+1+x)t} dt - \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} te^{-xt} dt$$

Pour $y > 0$, une intégration par parties donne $\int_0^a te^{-yt} dt = \left[-\frac{t}{y} e^{-yt} \right]_0^a + \frac{1}{y} \int_0^a e^{-yt} dt = \frac{-aye^{-ya} + 1 - e^{-ay}}{y^2}$. En faisant tendre a vers $+\infty$, on trouve alors

$$\forall y > 0, \int_0^{+\infty} te^{-ay} dt = \frac{1}{y^2}$$

et ainsi

$$\forall x > 0, Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} te^{-(k+1+x)t} dt \quad (*)$$

On veut maintenant intervertir somme et intégrale par le théorème d'intégration terme à terme. On travaille pour un $x > 0$ fixé.

Posons $u_k : t \mapsto te^{-(k+1+x)t}$.

- Pour tout $k \geq 0$, u_k est continue sur $]0, +\infty[$ (en part. c.p.m.)
- $\sum u_k$ converge simplement sur \mathbb{R}^{+*} de somme $t \mapsto \frac{t}{e^{t-1}} e^{-xt}$ qui est aussi continue sur \mathbb{R}^{+*} .
- pour tout $k \geq 0$, $\int_0^{+\infty} |u_k| = \frac{1}{(k+1+x)^2}$ est le terme général d'une série convergente.

Le théorème s'applique ce qui dans $(*)$ donne :

$$\forall x > 0, Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x+1)^2}$$

C'est la formule voulue (il suffit de poser $n = k + 1$).

Q9) On vient de voir que

$$\forall x > 0, Lf(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

On va appliquer le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions.

Posons $v_n : x \mapsto \frac{1}{(n+x)^2}$.

- Pour tout n , v_n est continue sur \mathbb{R}^+ ,
- On a $\|v_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum (v_n)$ converge normalement sur \mathbb{R}^+ .

Le cours indique que la somme de la série $\sum (v_n)$ est continue sur \mathbb{R}^+ . En particulier,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} Lf(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Autrement dit, on a un développement asymptotique à trois termes significatifs

$$Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \frac{\pi^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(1)$$

Q10) Il s'agit d'utiliser le théorème sur le caractère \mathcal{C}^∞ des intégrales à paramètres.

- (H0) Pour tout $x > \alpha$ (et donc $x \in E$) la fonction $t \mapsto e^{-xt}f(t)$ est intégrable sur \mathbb{R}^{+*} .
- (H1) Pour tout $t \geq 0, x \mapsto e^{-xt}f(t)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] \alpha, +\infty[$ de dérivée n -ième $x \mapsto (-t)^n e^{-xt}f(t)$.
- (H2) Pour tout $x > \alpha, t \mapsto (-t)^n e^{-xt}f(t)$ est continue sur \mathbb{R}^+ , et on va montrer qu'elle est, sur tout segment, dominée par une fonction intégrable indép. de x .

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $[a, b] \subset] \alpha, +\infty[$. On a

$$\forall x \in [a, b], \forall t \geq 0, |(-t)^n e^{-xt}f(t)| \leq t^n e^{-at}|f(t)| = \phi_n(t)$$

ϕ_n est continue sur \mathbb{R}^+ et présente un unique problème d'intégrabilité en $+\infty$. Comme $a > \alpha = \inf(E)$, il existe $c \in E$ tel que $a > c$ (caractérisation de la borne inférieure). On a alors, au voisinage de $+\infty$, $\phi_n(t) = e^{-ct}|f(t)|t^n e^{-(a-c)t} = o(e^{-ct}f(t))$ (car $a - c > 0$). Comme $c \in E$, $t \mapsto e^{-ct}f(t)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (sur \mathbb{R}^+). Ainsi, ϕ_n est intégrable au voisinage de $+\infty$ elle aussi et donc elle l'est sur \mathbb{R}^+ .

Le théorème s'applique. Il indique que $Lf \in \mathcal{C}^\infty(] \alpha, +\infty[, \mathbb{R})$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > \alpha, (Lf)^n(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt} dt$$

Q11) Comme f est positive, on a $E = E'$. Il s'agit de trouver les $x \in \mathbb{R}$ tel que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-(x+a)t} dt$ converge (le seul problème étant celui au voisinage de $+\infty$) ou tels que $t \mapsto t^n e^{-(x+a)t}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ (idem). Si $x+a > 0$ alors $t^n e^{-(x+a)t} = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$ (croissances comparées) et la fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$. Si $x+a \leq 0$ alors $t \cdot t^n e^{-(x+a)t} \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$ et la fonction n'est donc pas intégrable au voisinage de $+\infty$. Finalement ;

$$E = E' =] -a, +\infty[$$

Pour $y > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, une intégration par parties donne (en omettant les détails de calcul) $\int_0^{+\infty} t^n e^{-yt} dt = \frac{n}{y} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-yt} dt$. On en déduit par récurrence simple que

$$\forall y > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^n e^{-yt} dt = \frac{n!}{y^{n+1}}$$

En particulier, on a

$$\forall x > -a, Lf(x) = \frac{n!}{(x+a)^{n+1}}$$

- Q12)** a) On fixe $\beta > 0$. Posons $g : t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} t^k$. On sait qu'au voisinage de 0 on a $g(t) = O(t^{n+1})$. Il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ et $c \in]0, \beta[$ tel que

$$\forall t \in [0, c], |g(t)| \leq M t^{n+1}$$

La relation de Chasles, l'inégalité triangulaire et la croissance du passage à l'intégrale donnent

$$\left| \int_0^\beta g(t) e^{-tx} dt \right| \leq \int_0^c |g(t)| e^{-tx} dt + \|g\|_{\infty, [c, \beta]} \int_c^\beta e^{-xt} dt \leq M \int_0^c t^{n+1} e^{-tx} dt + \|g\|_{\infty, [c, \beta]} (\beta - c) e^{-cx}$$

Comme l'intégrande est positive, on peut majorer $\int_0^c t^{n+1} e^{-tx} dt$ par la même intégrale de 0 à $+\infty$ et le calcul de Q11) indique alors que

$$\left| \int_0^\beta g(t) e^{-tx} dt \right| \leq \frac{M(n+1)!}{x^{n+2}} + \|g\|_{\infty, [c, \beta]} (\beta - c) e^{-cx} = O_{x \rightarrow +\infty}(x^{-n-2})$$

ce qui correspond au résultat demandé.

- b) Avec le calcul de la Q11) on a (en continuant à utiliser la fonction g introduite au a)

$$\forall x \in E \cap \mathbb{R}^{+*}, Lf(x) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^{k+1}} = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-tx} dt$$

La question précédente donne un renseignement pour l'intégrale entre 0 et 1. Intéressons-nous à l'autre partie. Fixons $c \in E \cap \mathbb{R}^{+*}$ (c existe car E est non majoré), travaillons avec $x \geq c+1$ et écrivons que

$$\forall t \geq 1, |g(t) e^{-tx}| = |g(t) e^{-ct} e^{-(x-c)t}| \leq |g(t) e^{-ct}| e^{-(x-c)}$$

$t \mapsto g(t) e^{-ct}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (car $c \in E$ donc $t \mapsto f(t) e^{-ct}$ est intégrable et $c > 0$ donc pour tout $k, t \mapsto t^k e^{-ct}$ est aussi intégrable sur \mathbb{R}^+). On a alors

$$\left| \int_1^{+\infty} g(t) e^{-xt} dt \right| \leq e^{-(x-c)} \int_1^{+\infty} |g(t)| e^{-ct} dt$$

et cet terme est dominé par (et même négligeable devant) x^{-n-2} quand $x \rightarrow +\infty$. En sommant, on a alors

$$\int_0^{+\infty} \left(f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} t^k \right) e^{-tx} dt = O(x^{-n-2})$$

et le calcul de la Q11) donne

$$Lf(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^{k+1}} + O(x^{-n-2})$$

- Q13)** a) f est continue sur \mathbb{R}^+ et admet une limite en $+\infty$ et elle est donc bornée sur \mathbb{R}^+ (majorée en module par $|\ell| + 1$ au voisinage de $+\infty$ et continue sur le segment qui reste). Soit $x > 0$;

$$|f(t) e^{-xt}| \leq \|f\|_{\infty, \mathbb{R}^+} e^{-xt}$$

avec un majorant qui est intégrable sur \mathbb{R}^+ et donc $x \in E$. Ainsi

$$\mathbb{R}^{+*} \subset E$$

- b) On a

$$\forall x > 0, \quad x Lf(x) = \int_0^{+\infty} x f(t) e^{-xt} dt$$

Le changement de variable $u = xt$ donne

$$\forall x > 0, \quad x Lf(x) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du =: G(x).$$

On va utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

- (CvS) Pour chaque $u \in]0, +\infty[$, $f(\frac{u}{x})e^{-u} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ell e^{-u}$,
- (Domination)
 $\forall x \in]0, +\infty[$, $\forall u \geq 0$, $|f(\frac{u}{x})e^{-u}| \leq \|f\|_\infty e^{-u}$ et le majorant est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Le théorème s'applique et donne que $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \ell e^{-u} du = \ell$.

- Q14)** a) Il s'agit de montrer que f n'est pas intégrable sur \mathbb{R}^+ ou encore que $F(a) = \int_0^a |f|$ n'admet pas de limite infinie quand $a \rightarrow +\infty$. On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)| dt \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{(n+1)\pi} dt = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F((n+1)\pi) \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

F n'est donc pas bornée sur \mathbb{R}^+ et

$$0 \notin E$$

- b) Avec la partie préliminaire, on en déduit que $E \subset]0, +\infty[$. Réciproquement, si $x > 0$ alors $f(t)e^{-xt} = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$ et donc $x \in E$. Ainsi

$$E =]0, +\infty[$$

- c) Le seul problème dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est celui au voisinage de $+\infty$. On a par I.P.P.

$$\forall a \geq 1, \quad \int_1^a \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_1^a + \int_1^a \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

Le terme "crochet" du membre de droite admet une limite quand $a \rightarrow +\infty$ et d'autre part $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (majorée en module par $1/t^2$) et l'intégrale du membre de droite admet donc une limite quand $a \rightarrow +\infty$.

Ainsi il en est finalement de même de l'intégrale du membre de gauche. L'intégrale de $\frac{\sin(t)}{t}$ existe donc aussi au voisinage de $+\infty$. On a finalement existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et

$$0 \in E'$$

- d) Il convient encore d'utiliser le théorème sur le caractère \mathcal{C}^1 des intégrales à paramètres.

- $\forall x > 0, t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ (car $x \in E$).
- $\forall t > 0, x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} de dérivée $x \mapsto -\sin(t)e^{-xt}$.
- $\forall x > 0, t \mapsto -\sin(t)e^{-xt}$ est continue sur \mathbb{R}^+ .
- $\forall a > 0, \forall x \geq a, \forall t \geq 0, |-\sin(t)e^{-xt}| \leq e^{-at}$ majorant indépendant de x qui est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Ainsi, $Lf \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ et

$$\forall x > 0 (Lf)'(x) = - \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt} dt = -\frac{1}{1+x^2}$$

le calcul de l'intégrale se faisant, par exemple, en interprétant le sinus comme partie imaginaire de e^{it} .

- e) Deux primitives d'une fonction sur un intervalle différant d'une constante, on déduit de la question précédente que :

$$\exists c \in \mathbb{R} / \forall x > 0, Lf(x) = c - \arctan(x)$$

D'autre part, f étant bornée sur \mathbb{R}^+ (continue et de limite nulle en l'infini) on a

$$|Lf(x)| \leq \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{\|f\|_\infty}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit que $c = \pi/2$ et

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

f) Soit $x \geq 0$ (et donc $x \in E'$). Le changement de variable $u = x - n\pi$ donne

$$f_n(x) = (-1)^n e^{-n\pi x} \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + n\pi} e^{-ux} dx$$

On remarque que $(f_n(x))$ est une suite alternée, de limite nulle (car $x \in E'$) et que $(|f_n(x)|)$ décroît (c'est le cas des suites positives de terme généraux $e^{-n\pi x}$ et $\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + n\pi} e^{-ux} dx$). Autrement dit il s'agit d'une série alternée spéciale et le théorème dit alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k \geq n+1} f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \text{ majorant indép. de } x$$

et on a donc

$$\left\| \sum_{k \geq n+1} f_k \right\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \text{ majorant qui tend vers } 0$$

Ce qui montre que $\sum (f_k)$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ .

g) . Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0, +\infty[$ et que par la question précédente, $\sum f_n$ CvU sur $[0, +\infty[$, on conclut que $L(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0, +\infty[$ et en particulier en 0. Ainsi $Lf(0) = \lim_{x \rightarrow 0} Lf(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\pi/2 - \arctan(x)) = \pi/2$

Q15) a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Par linéarité du passage à l'intégrale, comme $P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$, on a par combinaisons linéaires :

$$\int_0^1 P(t)g(t)dt = \sum_{k=0}^n a_k \int_0^1 t^k g(t)dt = 0$$

b) D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_n) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\|P_n - g\|_{\infty, [0,1]} \rightarrow 0$. On a alors

$$\left| \int_0^1 P_n g - \int_0^1 g^2 \right| \leq \|P_n - g\|_{\infty, [0,1]} \int_0^1 |g| \rightarrow 0$$

et comme $\int_0^1 P_n g$ est toujours nul,

$$\int_0^1 g^2 = 0$$

g^2 étant continue et positive sur $[0, 1]$ ceci entraîne que

$$\forall t \in [0, 1], g(t) = 0$$

N.B. Cet argument est en fait euclidien, cf. cours T3 ou T4.

Q16) a) La fonction $u \mapsto e^{-xu} f(u)$ étant continue sur \mathbb{R}^+ , le théorème fondamental indique que h est une primitive de cette fonction sur \mathbb{R}^+ . Une intégration par partie donne alors

$$\forall b > 0, \int_0^b f(t) e^{-(x+a)t} dt = [h(t) e^{-at}]_0^b + a \int_0^b e^{-at} h(t) dt$$

Le membre de gauche admet une limite (égale à $Lf(x+a)$) quand $b \rightarrow +\infty$ (car $x+a \in E$). On a donc

$$Lf(x+a) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(h(b) e^{-ab} + a \int_0^b e^{-at} h(t) dt \right)$$

Par ailleurs, h admet une limite finie en $+\infty$ (car $x \in E \subset E'$) et $e^{-ab} \rightarrow 0$ quand $b \rightarrow +\infty$ (car $a > 0$). Ainsi,

$$Lf(x+a) = \lim_{b \rightarrow +\infty} a \int_0^b e^{-at} h(t) dt = a \int_0^{+\infty} e^{-at} h(t) dt$$

l'existence de l'intégrale étant conséquence de l'existence des autres limites.

- b) $t \mapsto e^{-at}$ est un C^1 difféomorphisme de \mathbb{R}^{+*} dans $]0, 1[$. On peut ainsi poser $u = e^{-ta}$ pour obtenir (ce qui inclut l'existence de l'intégrale du membre de droite)

$$a \int_0^{+\infty} e^{-t(n+1)a} h(t) dt = \int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right) du$$

Par ailleurs le membre de gauche vaut $\frac{1}{n+1} Lf(x+(n+1)a)$ et est nul d'après la question précédente. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right) du = 0$$

- c) La fonction $g : u \mapsto h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right)$ est continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0 (car h admet une limite finie en $+\infty$ car $x \in E$). Avec les question b) et Q15 b), on en déduit que g est nulle. Quand u varie dans $[0, 1]$, $-\frac{\ln(u)}{a}$ varie dans \mathbb{R}^+ et h est donc nulle sur \mathbb{R}^+ .

Q17) Soit f telle que E est non vide. Supposons que $Lf = 0$; la question précédente indique que $\forall x \in E$, une primitive de $u \mapsto e^{-xu} f(u)$ est nulle sur \mathbb{R}^+ . Pour tout x de E , $u \mapsto e^{-xu} f(u)$ est donc nulle sur \mathbb{R}^+ . Comme E non vide (et comme exp ne s'annule pas sur \mathbb{R}) f est donc nulle sur \mathbb{R}^+ . Le noyau de l'application linéaire L est donc réduit à $\{0\}$ et L est injective.

Q18) Remarque préliminaire :

Comme f est positive, on a $E = E'$ mais aussi Lf qui est décroissante sur E : en effet $\forall x, y \in E$ tels que $x \leq y$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$ on a

$$f(t)e^{-\lambda(t)x} \geq f(t)e^{-\lambda(t)y}$$

et donc

$$Lf(x) \geq Lf(y)$$

En particulier, par théorème de limite monotone, Lf admet des limites aux bornes de l'intervalle E (éventuellement $+\infty$ en la borne inférieure si la fonction n'est pas majorée).

- a) On suppose Lf bornée sur E et on note M un majorant de cette fonction. Montrons que

$$\forall b \geq 0, \int_0^b f(t)e^{-\alpha t} dt \leq M \quad (*)$$

Fixons donc $b \geq 0$; $G_b : x \mapsto \int_0^b f(t)e^{-xt} dt$ est continue sur \mathbb{R} par théorème sur les intégrales à paramètres car

- $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $[0, b]$
- $\forall t \in [0, b], x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur \mathbb{R}
- $\forall [u, v] \subset \mathbb{R}, \forall x \in [u, v], \forall t \in [0, b], |f(t)e^{-xt}| \leq f(t)e^{-ut}$ et le majorant est intégrable sur $[u, v]$ puisque continu sur ce SEGMENT).

Or, $\forall x \in E, G_b(x) \leq Lf(x)$ (car f est positive) et donc $\forall x \in E, G_b(x) \leq M$. En faisant tendre x vers α , on obtient (*).

La fonction $b \mapsto \int_0^b f(t)e^{-\alpha t} dt$ est ainsi majorée sur \mathbb{R}^+ et c'est une fonction croissante (car f est positive). Elle admet donc une limite finie quand $b \rightarrow +\infty$ et donc

$$\alpha \in E' = E$$

- b) Par contraposée, si $\alpha \notin E$ alors Lf n'est pas bornée. Avec la remarque initiale de monotonie, on a donc

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} Lf(x) = +\infty$$

Q19) On a ici (pour $x \in E'$),

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(1+t)^x} dt.$$

- a) Si $x > 1$ alors $\left| \frac{\cos(t)}{(1+t)^x} \right| \leq \frac{1}{(1+t)^x}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et $x \in E$.
Si $x \leq 1$ alors on remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\cos(t)|}{(1+t)^x} dt \geq \int_{n\pi}^{n\pi+\pi/4} \frac{dt}{\sqrt{2}(1+t)^x} \geq \frac{\pi}{4\sqrt{2}(1+(n+1)\pi)^x}$$

On conclut alors comme en Q14 a) que $x \notin E$. Ainsi

$$E =]1, +\infty[$$

- b) Il s'agit de voir si $G : b \mapsto \int_0^b \frac{\cos(t)}{(1+t)^x} dt$ admet une limite en $+\infty$.
— Si $x > 0$, une intégration par parties donne

$$\forall b \geq 0, G(b) = \frac{\sin(b)}{(1+b)^x} + x \int_0^b \frac{\sin(t)}{(1+t)^{x+1}} dt$$

les deux termes du membre de droite admettent une limite quand $b \rightarrow +\infty$ (en particulier, la fonction sous l'intégrale est intégrable car dominée par $1/t^{x+1}$). Il en est de même du membre de gauche et $x \in E'$.

— Si $x = 0$ alors $G(b) = \sin(b)$ n'admet pas de limite en $+\infty$ et $0 \notin E'$.

— Si $x < 0$ alors $\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi/4} \frac{\cos(t)}{(1+t)^x} dt \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi/4} \frac{1}{(1+t)^x} dt \geq \frac{\pi}{4\sqrt{2}} (1+n\pi)^{-x}$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. Ainsi $G(2n\pi + \pi/4) - G(2n\pi)$ ne tend pas vers 0 et $x \notin E'$ (sinon, notre différence tendrait vers 0 comme différence de deux termes ayant la même limite).

On a donc montré que

$$E' =]0, +\infty[$$

- c) On réutilise le calcul du b) dans le cas $x > 0$ qui nous donne

$$\forall x > 0, Lf(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(1+t)^{x+1}} dt$$

En utilisant le théorème de continuité des intégrales à paramètre, on obtient que $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(1+t)^{x+1}} dt$ est continue sur $[1, +\infty[$ (on utilise la domination $\left| \frac{\sin(t)}{(1+t)^{x+1}} \right| \leq \frac{1}{(1+t)^2}$). On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} Lf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(1+t)^2} dt$$

En refaisant une intégration par partie dans l'autre sens, on montre que $Lf(x) \rightarrow Lf(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+t} dt$ quand $x \rightarrow 1^+$.

- Q20)** a) Soit $P \in \mathcal{P}$; on a $L(XP')(x) = \int_0^{+\infty} tP'(t)e^{-tx} dt$. Une intégration par parties (dont on ne détaille pas le calcul) donne (compte-tenu des croissances comparées et de la Q11),

$$\forall x > 0, L(XP')(x) = - \int_0^{+\infty} P(t)(e^{-tx} - xte^{-tx}) dt = -LP(x) - x(LP)'(x)$$

et de façon similaire,

$$\begin{aligned}
\forall x > 0, L(XP'')(x) &= - \int_0^{+\infty} P'(t) (e^{-tx} - xte^{-tx}) dt \\
&= -L(P')(x) + x \int_0^{+\infty} tP'(t)e^{-tx} dt \\
&= -L(P')(x) - x \int_0^{+\infty} P(t) (e^{-tx} - xte^{-tx}) dt \\
&= -L(P')(x) - xLP(x) - x^2(LP)'(x)
\end{aligned}$$

Supposons donc que $XP'' + (1-X)P' + nP = 0$. On a alors $L(XP'') + L(P') - L(XP') + nL(P) = 0$ ce qui donne

$$\forall x > 0, x(1-x)(LP)'(x) + (1-x)LP(x) + nLP(x) = 0$$

$Q = LP$ est donc solution sur $]0, +\infty[$ de

$$x(1-x)y'(x) + (n+1-x)y(x) = 0 \quad (E'_n)$$

b) Sur $]1, +\infty[$, le coefficient $x(1-x)$ de $y'(x)$ ne s'annule pas, on peut donc normaliser l'équation (E'_n) en :

$$y'(x) + \frac{n+1-x}{x(1-x)}y(x) = 0$$

$$\forall x > 1, \frac{x-n-1}{x(1-x)} = -\frac{n+1}{x} + \frac{n}{1-x}$$

Donc une primitive sur $]1, +\infty[$ de $x \mapsto \frac{x-n-1}{x(1-x)}$ est $x \mapsto \ln\left(\frac{(x-1)^n}{x^{n+1}}\right)$. Le cours indique que l'ensemble des solutions sur $]1, +\infty[$ de (E'_n) est l'espace vectoriel engendré par

$$f_n : x \mapsto \frac{(x-1)^n}{x^{n+1}}$$

c) Par a) si P est solution de (E_n) alors LP est solution de (E'_n) sur $]1, +\infty[$ et LP est multiple de f_n . Par ailleurs, avec la formule du binôme :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} \frac{k!}{x^{k+1}}$$

Avec la Q11) dans le cas $a = 0$, on voit que f_n est image par L de

$$Q_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} X^k.$$

Ainsi, il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$L(P) = \lambda L(Q_n) = L(\lambda Q_n).$$

Par l'injectivité de L prouvée Q17), on en déduit que ;

$$P = \lambda Q_n$$

Réciproquement, un calcul sur les polynômes montrerait que Q_n est bien solution de (E_n) .

On conclut donc que les $P \in \mathcal{P}$ solutions de (E_n) sont les λQ_n pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Q21) a) Vérification immédiate avec la formule sur la dérivée d'un produit. En effet :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(te^{-t}P'(t)) &= \frac{d}{dt}(te^{-t})P'(t) + te^{-t}P''(t), \\ &= e^{-t}P'(t) - te^{-t}P'(t) + te^{-t}P''(t).\end{aligned}$$

Donc

$$e^t \frac{d}{dt}(te^{-t}P'(t)) = (1-t)P'(t) + tP''(t) \quad (*)$$

ce qui donne bien l'équation (E_n) .

b) L'application U est linéaire par linéarité de la dérivation et de la multiplication.

D'autre part pour tout $P \in \mathcal{P}$, $U(P)(t) = (1-t)P'(t) + tP''(t)$ ce qui est bien la forme d'un polynôme donc $U(P) \in \mathcal{P}$.

Au total U est donc bien un endomorphisme de \mathcal{P} .

Q22) a) Soient $P, Q \in \mathcal{P}$. $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}^+ et dominée par $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ (croissances comparées). C'est donc une fonction intégrable sur \mathbb{R}^+ et son intégrale existe a fortiori sur \mathbb{R}^+ .

b) L'application est bien définie par a), possède la symétrie $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$ et est linéaire par rapport à la seconde variable (par linéarité du passage à l'intégrale). De plus si $P \in \mathcal{P}$, $\langle P, P \rangle = \int_0^{+\infty} |P(t)|^2 e^{-t} dt \geq 0$ et si cette quantité est nulle alors $P = 0$ (sur \mathbb{R}^+ car $t \mapsto |P(t)|^2 e^{-t}$ est alors continue positive d'intégrale nulle et donc nulle et l'exponentielle ne s'annule pas). Et un polynôme qui est nul sur \mathbb{R}^+ est le polynôme nul. On a finalement un produit scalaire sur \mathcal{P} .

c) On a $U(P)(t)Q(t)e^{-t} = D(te^{-t}P'(t))Q(t)$. Une intégration par parties donne

$$\forall a \geq 0, \quad \int_0^a U(P)(t)Q(t)e^{-t} dt = [te^{-t}P'(t)Q(t)]_0^a - \int_0^a te^{-t}P'(t)Q'(t) dt$$

Par croissances comparées, les différents termes admettent une limite quand $a \rightarrow +\infty$ et on obtient

$$\int_0^{+\infty} U(P)(t)Q(t)e^{-t} dt = - \int_0^{+\infty} te^{-t}P'(t)Q'(t) dt \quad (1)$$

On montre de même que

$$\int_0^{+\infty} P(t)U(Q)(t)e^{-t} dt = - \int_0^{+\infty} te^{-t}P'(t)Q'(t) dt \quad (2)$$

Avec (1) et (2) on conclut bien :

$$\langle U(P), Q \rangle = \langle P, U(Q) \rangle$$

d) Par définition, avec l'équation de la Q21 a); les solutions non nulles de (E_n) sont les vecteurs propres de U pour la valeur propre $-n$.

e) On verra au R4 que cette propriété est générale pour les endomorphismes *symétriques* i.e. vérifiant la propriété du c).

Soient λ, μ deux valeurs propres distinctes (réelles d'après ce qui précède) et P, Q des vecteurs propres associés. On a

$$\lambda \langle P, Q \rangle = \langle U(P), Q \rangle = \langle P, U(Q) \rangle = \mu \langle P, Q \rangle$$

Comme $\lambda \neq \mu$, on conclut bien que $\langle P, Q \rangle = 0$.

f) Ici avec ce qui précède, on a vu que les vecteurs propres de U pour la v.p. $-n$ étaient les solutions de (E_n) et à la Q21 on a trouvé des solutions non nulles à (E_n) les λQ_n . Bien sûr si on voulait une solution autonome par rapport à l'étude précédente, il faudrait faire autrement.

Par le e), on sait que si $n \neq m$, P_n et P_m sont orthogonaux. La famille (P_n) est donc une famille orthogonale. D'autre part; avec la formule donnée pour les Q_n , on sait que $\deg(Q_n) = n$ donc $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc on a bien une base de \mathcal{P} .

g) D'après la formule de Leibniz, on a

$$\begin{aligned} e^t D^n (e^{-t} t^n) &= e^t \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k (e^{-t}) D^{n-k} (t^n) \\ &= e^t \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-t} \frac{n!}{k!} t^k \\ &= n! Q_n(t) \end{aligned}$$

d'où la conclusion.