

1 & 2) Le principe d'inertie (ou 1^{ère} loi de Newton) stipule qu'il existe une classe de référentiels nommés référentiels galiléens, dans lesquels un point matériel **isolé** ou pseudo isolé a un mouvement **rectiligne uniforme** ou est **immobile**.

Le principe fondamental de la mécanique (ou 2^{ème} loi de Newton) affirme que dans un référentiel galiléen, la dérivée de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la somme des forces appliquées.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{m}_i \vec{v}_{i/\mathcal{R}_g}) = \mathbf{m}_i \vec{a}_{i/\mathcal{R}_g} = \sum \vec{F} \quad \text{Et} \quad \vec{F}_{m_1 \rightarrow m_2} = -\frac{G m_1 m_2 \vec{M_1 M_2}}{M_1 M_2^3}$$

$$3) \mathcal{M}_O d\theta = dW = -d\mathcal{E}_p \Leftrightarrow \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} C(\theta - \theta_0)^2 + cste \quad \text{Donc} \quad \mathcal{E}_{p,S} = \frac{1}{2} C(\theta - \theta_0)^2$$

$$\text{Puis } \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad \text{et finalement} \quad \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} C(\theta - \theta_0)^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

$$4) \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = -\alpha \dot{\theta}^2 \Leftrightarrow J \ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + C(\theta - \theta_0) = 0$$

$$5) \text{ Les oscillations sont faiblement amorties si } \alpha^2 \ll 4JC. \text{ On a alors } \theta(t) = A e^{-\frac{\alpha}{2J}t} \cos(\omega t + \varphi) + \theta_0$$

$$\text{On a } \theta_\infty = \theta_0 \text{ et } \omega = \sqrt{\frac{C}{J} - \frac{\alpha^2}{4J^2}} = \sqrt{\frac{C}{J}} \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sim \omega_0 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \text{ donc } T \sim T_0 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)$$

$$\text{L'erreur relative } \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{\varepsilon^2}{2} \text{ est inférieure à } 1\% \text{ si } \varepsilon < 0,14.$$

$$6) T^2 \sim T_0^2 = \frac{4\pi^2 J}{C} \Leftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{C} (J_0 + 2J_1 + 2mL^2)$$

$L^2 \text{ (m}^2\text{)}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$4,9 \cdot 10^{-3}$	$6,4 \cdot 10^{-3}$
$T^2 \text{ (s}^2\text{)}$	$1,9 \cdot 10^5$	$2,6 \cdot 10^5$	$3,4 \cdot 10^5$

$$\text{Par régression linéaire, on obtient : } \frac{8m\pi^2}{C} = 5,4 \cdot 10^7 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-2} \rightarrow C = 2,9 \cdot 10^{-7} \text{ N.m.rad}^{-1}$$

$$\text{Et } \left| \frac{4\pi^2}{C} (J_0 + 2J_1) \right| = 2,7 \cdot 10^3 \text{ s}^2 \ll T^2 \rightarrow \text{L'ordonnée à l'origine peut être négligée.}$$

7) L'énoncé précise qu'à l'équilibre, la barre est dans la direction Est-Ouest. Soit H , le projeté de O sur l'axe des pôles :

$$\vec{F}_{ie,1} = m_{i1} \omega_t^2 \vec{HS}_1 = m_{i1} \omega_t^2 (\vec{HO} + \vec{OS}_1) \quad \text{et} \quad \vec{F}_{ie,2} = m_{i2} \omega_t^2 (\vec{HO} + \vec{OS}_2)$$

$$\vec{F}_{ie,1} = m_{i1} \omega_t^2 (R_t \cos \lambda (\cos \lambda \vec{u}_z - \sin \lambda \vec{u}_\lambda) - L \vec{u}_\rho)$$

$$\vec{F}_{ie,2} = m_{i2} \omega_t^2 (R_t \cos \lambda (\cos \lambda \vec{u}_z - \sin \lambda \vec{u}_\lambda) + L \vec{u}_\rho)$$

$$8) \text{ La somme des moments de force est nulle : } (\vec{OS}_1 \wedge \vec{F}_{ie,1})_z + (\vec{OS}_2 \wedge \vec{F}_{ie,2})_z - C(\theta_\infty - \theta_0) = 0$$

$$\text{Situation de la figure 1 : } L \omega_t^2 R_t \cos \lambda \sin \lambda (m_{i1} - m_{i2}) - C(\theta_{\infty 1} - \theta_0) = 0$$

$$\text{Situation inversée : } L \omega_t^2 R_t \cos \lambda \sin \lambda (m_{i2} - m_{i1}) - C(\theta_{\infty 2} - \theta_0) = 0$$

$$\text{On en déduit que } \theta_{\infty 1} - \theta_{\infty 2} = \frac{L \omega_t^2 R_t}{C} (m_{i1} - m_{i2}) \sin 2\lambda$$

$$9) \delta_m = \frac{2T_t^2 L \delta\theta}{T^2 R_t} = 3,6 \cdot 10^{-7} \quad (\delta\theta = 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ rad}, T_t = 8,6 \cdot 10^4 \text{ s}, T = 4,4 \cdot 10^2 \text{ s}, R_t = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m})$$

10) Cela signifie que le rapport δ_m réel est inférieur à $3,6 \cdot 10^{-7}$!

11) En électrostatique, on a $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (ρ la densité volumique de charge) et $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$

Aucune analogie n'existe avec la magnétostatique car $\text{div } \vec{B} = 0$ et $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$$\vec{r} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi(M) \rightarrow -\text{div } \overrightarrow{\text{grad}} \phi(M) = -4\pi G \rho(M) \rightarrow \Delta \phi = 4\pi G \rho(M)$$

12) $\vec{F} = -m \overrightarrow{\text{grad}} \phi(r) = -m \frac{d\phi}{dr} \vec{e}_r$ On reconnaît une force centrale, son moment en O est nul.

Par application du T.M.C. à m en O dans \mathcal{R}_g , on a $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M) = \overrightarrow{cst} \rightarrow \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{cst}$ **Mouvement plan**

La norme de $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M)$ étant $r^2 \dot{\theta}$, on reconnaît la **constante des aires, le double de la vitesse aréolaire**.

13) D'après la 2^{ème} loi de Newton, $m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = -m \frac{d\phi}{dr} \vec{e}_r \rightarrow \frac{v_c^2}{r} = \frac{d\phi}{dr} \rightarrow \vec{v}_c = \pm \sqrt{r \frac{d\phi}{dr}} \vec{e}_\theta$

14) $\vec{v}_c = \pm \sqrt{\frac{GM_b}{r}} \vec{e}_\theta$ On est dans le cadre des lois de Kepler avec notamment la 3^{ème} :

$$v_c^2 = \frac{GM_b}{r} \rightarrow r^2 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{GM_b}{r} \rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_b}{4\pi^2}$$

15) En dehors du bulbe, le modèle képlérien **n'est plus valable** car la vitesse est indépendante du rayon.

$$r \frac{d\phi}{dr} \sim \text{cste} \rightarrow \phi(r) \sim \ln r + \text{cste}$$

16) L'équation de Poisson est une **équation locale**. Afin de ne faire intervenir que la densité de matière noire $\rho(r)$, nous l'écrivons en dehors du bulbe ($r > r_b$, avec r_b le rayon du bulbe).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) &= 4\pi G C_0 \frac{r^2}{r^2 + r_0^2} \\ \rightarrow r^2 \frac{d\phi}{dr}(r) - r_b^2 \frac{d\phi}{dr}(r_b) &= 4\pi G C_0 \left(r - r_b - r_0 \arctan\left(\frac{r}{r_0}\right) + r_0 \arctan\left(\frac{r_b}{r_0}\right) \right) \end{aligned}$$

On remarque alors que $r \frac{d\phi}{dr}(r) = 4\pi G C_0 \left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r_0}{r} \arctan\left(\frac{r}{r_0}\right) + \frac{r_0}{r} \arctan\left(\frac{r_b}{r_0}\right) \right) + \frac{r_b}{r} v_c(r_b)$

et en effet, si $r \gg r_b$ et $r \gg r_0$, on a alors $r \frac{d\phi}{dr}(r)$ qui tend vers $4\pi G C_0 = \text{cste}$

$$v_{c,\text{Soleil}}^2 = 4\pi G C_0 \rightarrow C_0 = 5,7 \cdot 10^{19} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} = 8,9 \cdot 10^5 M_\odot \cdot \text{pc}^{-1}$$

[L'énoncé nous incite à considérer que $r_0 \sim r_b$. Cela ne me semble pas évident. Par contre, le fait que v_c stagne dès la sortie du bulbe laisse à penser que **r_0 est plus petit ou de même ordre que r_b** .]

$$\mathbf{17)} \quad M_{\text{noire}} = \int_0^{R_d} 4\pi C_0 \frac{r^2}{r^2 + r_0^2} dr = 4\pi C_0 \left(R_d - r_0 \arctan\left(\frac{R_d}{r_0}\right) \right) \sim 4\pi C_0 R_d \sim 3 \cdot 10^{11} M_\odot$$

D'après ce modèle, la masse de matière noire peut représenter jusqu'à **97 %** de la masse totale !

18) La dimension de a_0 est celle de $\overrightarrow{\text{grad}} \phi_m$, c'est-à-dire une accélération ($L \cdot T^{-2}$) et **$K = 1$**

19) $\text{div}(\mu(u)\overrightarrow{\text{grad}} \phi_m) = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} \phi)$ Or deux champs à **même divergence diffèrent d'un rotationnel**
 $\rightarrow \mu(u)\overrightarrow{\text{grad}} \phi_m = \overrightarrow{\text{grad}} \phi + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{h} \quad (\text{div} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{h} = 0 \quad \forall \vec{h})$

20) Dans le régime des faibles accélérations en périphérie de la galaxie ($a \ll a_0 \Leftrightarrow u \ll 1$), on écrit

$$\frac{\|\overrightarrow{\text{grad}} \phi_m\|}{a_0} \overrightarrow{\text{grad}} \phi_m = \overrightarrow{\text{grad}} \phi \rightarrow \frac{\|\overrightarrow{\text{grad}} \phi_m\|}{a_0} \overrightarrow{\text{grad}} \phi_m = \frac{GM_b}{r^2} \vec{e}_r \rightarrow \frac{1}{a_0} \left| \frac{d\phi_m}{dr} \right| \frac{d\phi_m}{dr} = \frac{GM_b}{r^2}$$

$$\rightarrow r \frac{d\phi_m}{dr} = \sqrt{GM_b a_0} \rightarrow v_c = (GM_b a_0)^{1/4}$$

21) Sans données concernant M_b , il est difficile d'estimer a_0 .

Avec $M_b = 10^{10} M_\odot$ et $v_c = 220 \text{ km.s}^{-1} \rightarrow a_0 = 2.10^{-9} \text{ m.s}^{-2}$

Or d'après la figure 3, $a_\odot = \frac{v_\odot^2}{r_\odot} = 2.10^{-10} \text{ m.s}^{-2}$

C'est deux valeurs sont proches. Le seuil d'accélération en deçà duquel la théorie MOND intervient correspond à peu près à la position du Soleil ... Anthropocentrisme, quand tu nous tiens !

[Il semblerait que la masse M_b soit un peu plus élevée ($10^{11} M_\odot$) et que la correspondance entre a_0 et a_\odot soit plus franche.]

22) En l'absence de densité volumique de charge, l'équation de Poisson devient l'équation de Laplace.

$$\Delta V = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Or d'après } \vec{F} = -q \overrightarrow{\text{grad}} V \rightarrow -q \frac{\partial V}{\partial x} = ax ; -q \frac{\partial V}{\partial y} = ay ; -q \frac{\partial V}{\partial z} = bz$$

Il en résulte que $2a + b = 0$ Ainsi, $V(x, y, z) = -\frac{b}{4q}(x^2 + y^2) + \frac{b}{2q}z^2 + \alpha = \beta(x^2 + y^2 - 2z^2) + \alpha$

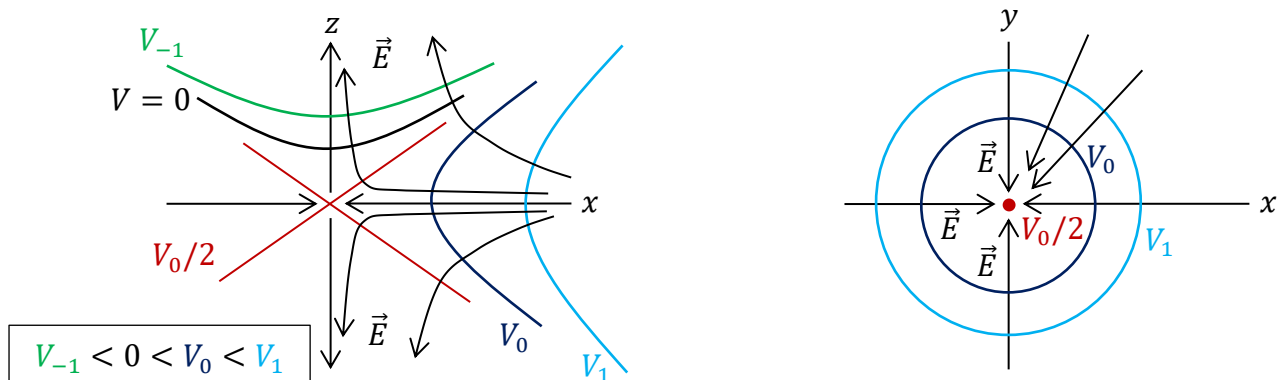
Avec les conditions aux limites : $\beta r_0^2 + \alpha = V_0$ et $-2\beta z_0^2 + \alpha = 0 \rightarrow \beta = \frac{V_0}{2r_0^2}$ et $\alpha = \frac{V_0}{2} \quad (2z_0^2 = r_0^2)$

23 & 24) L'origine est un point col du potentiel (maximum selon z , minimum selon x ou y) : \vec{E}_y est nul.

C'est donc un point d'équilibre mais il est **instable selon x ou y si $q < 0$** ou **instable selon z si $q > 0$** .

On peut le constater également avec l'expression de la force $\vec{F} = -2q\beta x\vec{e}_x - 2q\beta y\vec{e}_y + 4q\beta z\vec{e}_z$

Celle-ci se comporte comme une force de rappel (stabilité) selon x ou y si $q > 0$ et selon z si $q < 0$.



25) On applique la 2^{ème} loi de Newton à l'antiproton dans le référentiel terrestre galiléen. Il subit la force

$$\text{de Lorentz } -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \rightarrow \begin{cases} m_p \ddot{x} = 2e\beta x - eB_0 \dot{y} \\ m_p \ddot{y} = 2e\beta y + eB_0 \dot{x} \\ m_p \ddot{z} = -4e\beta z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \omega_0^2 x - \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = \omega_0^2 y + \omega_c \dot{x} \\ \ddot{z} = -2\omega_0^2 z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\zeta} - i\omega_c \dot{\zeta} - \omega_0^2 \zeta = 0 \\ \ddot{\zeta} + 2\omega_0^2 \zeta = 0 \end{cases}$$

Il y a confinement si $\zeta(t) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_c t\right) \left(C \exp\left(\frac{i}{2}\sqrt{\omega_c^2 - 4\omega_0^2} t\right) + D \exp\left(-\frac{i}{2}\sqrt{\omega_c^2 - 4\omega_0^2} t\right)\right)$, c'est-à-dire si le discriminant de l'équation caractéristique est négatif : $\omega_c > 2\omega_0 \Leftrightarrow B_0 > \underbrace{2\sqrt{\frac{m_p V_0}{e r_0^2}}}_{B_{min}} = 0,081 \text{ T}$

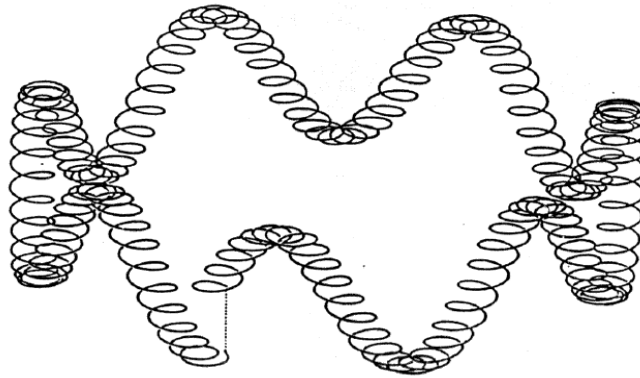
26) $\omega_c = 9,4 \cdot 10^7 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_0 = 3,8 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$

On peut écrire la solution ainsi : $\zeta(t) = C \exp\left(\frac{i}{2}\left(\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 - 4\omega_0^2}\right)t\right) + D \exp\left(\frac{i}{2}\left(\omega_c - \sqrt{\omega_c^2 - 4\omega_0^2}\right)t\right)$

Le premier terme correspond à une oscillation **rapide** de pulsation proche de ω_c alors que le deuxième témoigne d'une oscillation **lente** de pulsation proche de $\frac{\omega_0^2}{\omega_c} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$.

La troisième oscillation selon z a pour pulsation $\sqrt{2}\omega_0 = 5,4 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ (Pas si lente que ça !)

La trajectoire qui en découle a l'allure représentée ci-dessous.



27) $T = \frac{2\mathcal{E}_c}{3k_B} = 8 \cdot 10^{10} \text{ K}$ Les antiprotons sont très énergétiques.

D'après le théorème de la puissance mécanique, $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -P_{ray}$ Or $\mathcal{E} = \frac{m_p}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - eV(x, y, z)$

Le problème est ardu ! L'énoncé indique que l'oscillation selon z est la source principale du rayonnement, on décide alors de négliger les variations de tous les termes en x, y et leur dérivée.

$$\frac{d\mathcal{E}_z}{dt} = -P_{ray} \text{ Avec } \mathcal{E}_z = \frac{m_p}{2}\dot{z}^2 + \frac{eV_0}{r_0^2}z^2 = \frac{m_p}{2}(\dot{z}^2 + 2\omega_0^2 z^2)$$

[Cette décision, largement suggérée par l'énoncé, n'est pas si évidente que cela.]

Sur chaque période i , $z(t)$ est de la forme $z_{0i} \cos(\sqrt{2}\omega_0 t + \varphi)$ (l'amplitude z_{0i} décroît progressivement)

Ainsi, $z^2 = \frac{\dot{z}^2}{4\omega_0^4}$ et $\dot{z}^2 = \frac{\ddot{z}^2}{2\omega_0^2}$ donc $\mathcal{E}_z = \frac{m_p}{2\omega_0^2}\ddot{z}^2$ et finalement $\frac{d\langle \ddot{z}^2 \rangle_{T_0}}{dt} = -\frac{\mu_0 e^2 \omega_0^2}{3\pi c m_p} \langle \ddot{z}^2 \rangle_{T_0} \rightarrow \tau = \frac{3\pi c m_p}{\mu_0 e^2 \omega_0^2}$

Numériquement, τ est de l'ordre de 10^{13} s , le refroidissement n'est pas assuré par le rayonnement.

28) Par isotropie, $\vec{v}_0 = 0$ et donc $\sigma_v = \sqrt{v_0^2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_p}} = 0,50 \text{ m.s}^{-1}$ C'est exceptionnellement bas !

29 & 30) On projette la 2^{ème} loi de Newton sur l'axe vertical descendant Oz :

$$\ddot{z} = \overline{g} \rightarrow \dot{z} = \overline{g}t \pm v_0 \rightarrow z = \overline{g} \frac{t^2}{2} \pm v_0 t + z_0 \rightarrow \overline{g} = \frac{2}{t_c^2} (h \pm v_0 t_c) = \mathbf{9,78 \text{ m.s}^{-2}}$$

31 & 32) Ce que l'énoncé note $\delta \overline{g}$ est en fait l'incertitude sur la valeur moyenne $\delta \langle \overline{g} \rangle = \frac{\delta^* \overline{g}}{\sqrt{N}}$ avec $\delta^* \overline{g}$ l'incertitude sur une mesure de \overline{g} (l'étoile permet d'éviter le conflit de notation). Or $\delta^* \overline{g} = \frac{2}{t_c^2} \sqrt{\sigma_h^2 + t_c^2 \sigma_v^2}$

d'après l'expression des incertitudes composées $u(X) = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}$ ici $X = \overline{g} = f(h, v_0)$

$$\text{Finalement, } \delta \langle \overline{g} \rangle = \frac{2}{\sqrt{N} t_c^2} \sqrt{\sigma_h^2 + t_c^2 \sigma_v^2} = \frac{2}{\sqrt{N} t_c^2} \sqrt{\sigma_h^2 + t_c^2 \frac{3k_B T}{m_p}} = \frac{7,0}{\sqrt{N}} < \mathbf{9,78 \cdot 10^{-2}} \rightarrow \mathbf{N > 5,1 \cdot 10^3}$$

↑↑

Terme prépondérant

L'exigence est sévère, voilà pourquoi il faut refroidir autant le milieu.

Avec une température plus élevée, la dispersion des vitesses rendrait la mesure impossible.

En 2022, aucune différence de comportement vis-à-vis de la gravitation n'a encore été détectée entre la matière et l'antimatière. Mais en 2015, ce projet a donné lieu à un magnifique sujet de concours !
Pour rêver et mettre des images sur les mots ... <https://home.cern/fr/science/experiments/gbar>