Banque CCINP : Ex. 34, 35, 37,40,44, 45.

Ouverts, fermés

Exercice 1 (Groupe des périodes d'une fonction continue)**.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\Pi_f = \{ T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)\}$ l'ensemble des périodes de f (auxquelles on a rajouté 0).

a) Montrer que Π_f est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.

b) Montrer que si f est continue alors Π_f est un fermé de $\mathbb{R}$.

c) Montrer que la conclusion du b) n'est pas vraie si f n'est pas continue, par exemple avec la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

d) En admettant le résultat de l'exercice 6 ci-dessous, montrer que si f est une fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ non constante alors f admet une plus petite période strictement positive, appelée *la* période de f

Exercice 2. Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite *strictement croissante.*

Donner une CNS pour que l'ensemble $X = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ soit un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (Quasi QdC)**.** Soient A et B deux parties d'un e.v.n. E.

a) Quelle relation y-a-t-il entre $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$? (Inclusion, égalité, contre-exemples pour une inclusion ?)

b) Même question pour $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.

c) Même question pour $Int(A \cup B)$ et $Int(A) \cup Int(B)$.

d) Même question pour $Int(A \cap B)$ et $Int(A) \cap Int(B)$.

Exercice 4. a) Soit E un e.v.n. et A et B deux parties de E.

Montrer que si B est ouvert et $A \cap B = \varnothing$ alors $\overline{A} \cap B = \varnothing$.

b) Soit U un ouvert d'un e.v.n. Montrer que $Fr(U)$ est d'intérieur vide.

Exercice 5. Soit E un e.v.n. et $C \subset E$ un ensemble convexe. Montrer que :

a) $\overline{C}$ est convexe.

b) $\overset{\circ}{C}$ est convexe.

c) Soit C un ensemble convexe d'intérieur non vide. Soit $x \in \overset{\circ}{C}$ et $y \in \overline{C}$. Montrer que $[x, y[\subset \overset{\circ}{C}$.

Exercice 6 (Sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$: (*dém. centrale-Mines, mais il est bon de connaître le résultat pour des applications comme le 3)*)**.** Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ tel que $G \neq \{0\}$. Soit $\alpha = \inf G \cap \mathbb{R}^{+*}$.

1) On suppose ici que $\alpha > 0$.

a) Montrer que $\alpha \in G$.

b) Montrer qu'alors $G = \alpha\mathbb{Z}$.

c) En déduire que dans ce cas G est fermé dans $\mathbb{R}$.

2) On suppose que $\alpha = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Avec 1) et 2) on a démontré qu'un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ est ou bien de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ ou bien dense.

3) Une application : si a et b sont deux réels non nuls, montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense ssi $a/b \notin \mathbb{Q}$.

Indication – On regardera l'équivalence des négations.

Topologie dans $M_n(\mathbb{K})$ et applications

Exercice 7. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

a) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

Indication – **(M1)** On pourra considérer pour approcher une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ les matrices de la forme $A + \frac{1}{k} I_n$.

(M2) Si A est de rang r, utiliser une forme réduite de A pour la relation d'équivalence, qu'on peut alors approcher facilement par des matrices inversibles.

b) Soit $\Delta = \{A \in M_n(\mathbb{K}), \det(A) = 0\}$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de Δ.

Exercice 8 (Densité dans $M_n(\mathbb{C})$)**.** a) Rappeler une C.S très simple sur les entrées diagonales d'une matrice T.S $T \in M_n(\mathbb{K})$ pour que celle-ci soit diagonalisable.

b) Pour une matrice $M \in TS_n(\mathbb{K})$, construire une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in TS_n(\mathbb{K})$ de matrices déduites de M par une petite pertubation des entrées diagonales de sorte que $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} M$ (la perturbation tend vers zéro) et pour chaque $k \in \mathbb{N}$, A_k admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$.

c) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_0$ des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres distinctes est *dense* dans $M_n(\mathbb{C})$

d) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$ est *dense* dans $M_n(\mathbb{C})$

Exercice 9. a) Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices dz.

b) Démontrer que l'application $M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto \chi_A(A)$ est *continue*

c) En déduire le théorème de Cayley-Hamilton : pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\chi_M(M) = 0$.

Continuité et Ouverts/fermés comme préimage d'ouverts/fermés par des applications continues

Exercice 10. a) Montrer que l'application $\chi : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}_n[X]$, $A \mapsto \chi_A$ est *continue*

b) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note $S(A) = \{PAP^{-1},\ P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ l'ensemble des matrices semblables à A.

On suppose qu'il existe une suite $(A_k) \in S(A)^{\mathbb{N}}$ de matrices toutes semblables à A ayant la propriété que $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Montrer que A est nilpotente.

Exercice 11. Soit $E = M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $r \le \min(n,p)$ un entier. On note $G_r = \{A \in E,\ \mathrm{rg}(A) \le r\}$. On note $U_r = \{A \in E,\ \mathrm{rg}(A) = r\}$. a) Montrer que G_r est un fermé de E.

b) Montrer que G_r est exactement l'adhérence de U_r.

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. finie. Un endomorphisme $L \in \mathscr{L}(E)$ est dit cyclique ssi il existe un vecteur u de E tel que la famille $(u, L(u), \dots, L^{n-1}(u))$ soit une base de E.

(Dans cette base u est représenté par une matrice compagnon).

On dit aussi que L est cyclique pour le vecteur u.

a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, montrer que l'ensemble des endomorphismes cycliques pour un vecteur u donné est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

En déduire que l'ensemble des endomorphismes cycliques de E est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer qu'un endomorphisme ayant n valeur propres distinctes est cyclique pour un vecteur à préciser.

c) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices cycliques est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Continuité des applications linéaires/multi linéaire et Norme d'opérateur

BANQUE CCINP Ex. 38, contient l'ex. 16 ci-dessous dans lequel une méthode différente de celle du corrigé est proposée. Contient aussi un cas particulier de l'ex. 14.

Exercice 13. Soit E l'e.v. des suites réelles convergentes, muni de la N_∞. Soit $L : E \to \mathbb{R}$, $u \in E \mapsto \lim u_n$.

Montrer que L est continue et déterminer sa norme d'opérateur.

Exercice 14. Justifier la continuité des applications suivantes avec le critère de continuité des applications linéaires ou bilinéaires. Dans le cas des A.L. déterminer leur norme d'opérateur. :

a) Si $(E, \|\ \|)$ est un e.v.n. quelconque, alors l'addition $E \times E \to E$, $(u,v) \mapsto u+v$ est continue.

b) Si $(E, (\ |\ ))$ est un espace préhilbertien, et que $a \in E$ est une vecteur fixé, alors l'application $\varphi_a : E \to \mathbb{R}$, $u \mapsto (a|u)$ est continue.

c) Si $(E, \|\ \|)$ est un e.v.n. quelconque, montrer que l'application mult de $\mathbb{R} \times E$ dans E qui à (λ, x) associe $\lambda.x$ (la multiplication externe) est continue.

Exercice 15. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $f : E \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto ax + by$.

On munit E de sa norme infinie. Montrer que la norme d'opérateur de f est $\|f\| = |a| + |b|$.

Exercice 16 (Inclus dans la banque CCINP ici indic. différente)**.** soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \|_1$ définie par : $\forall f \in E$, $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f|$. Soit $L : E \to E$ qui a f associe $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$.

Montrer que L est continue, puis déterminer sa norme d'opérateur.

Indication pour la norme d'opérateur : on pourra considérer la suite des fonctions (f_n), continue affine par morceaux, avec $f_n(0) = 1$, $f_n(1/n) = 0$, f_n affine sur $[0, 1/n]$ nulle sur $[1/n, 1]$.

Exercice 17. Soit $E = \mathbb{C}[X]$ muni de la norme infinie sur les coefficients : si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k X^k$, $\|P\| = \max_{k \in [\![0,n]\!]} |a_k|$. Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\varphi : E \to \mathbb{C}$, la forme linéaire définie par : $P \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k \alpha_k$.

Déterminer une C.N.S. sur la suite (α_k) pour que la F.L. φ soit *continue* et dans ce cas déterminer sa norme d'opérateur.