Devoir surveillé 4 (4h)

Les calculatrices sont interdites

N.B. : les candidats et candidates attacheront la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si une personne est amenée à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, elle le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'elle a été amenée à prendre.

Problème : autour de la fonction digamma

Partie préliminaire

Q 1) a) Soit $x \in]0,+\infty[$, démontrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

b) On note, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t.$$

Démontrer que pour tout $x \in]0,+\infty[, \Gamma(x) > 0$.

On admet dans ce problème (cf. chap. I3) que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall\, x > 0,\ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Q 2) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $H_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$.

Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ converge.

La limite de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ sera notée γ dans tout le sujet (γ est appelée la constante d'Euler).

Dans la suite de ce problème, on définit :

$$\forall\, x \in]0,+\infty[, \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

la fonction ψ est appelée fonction Digamma.

Expressions de la fonction Gamma à l'aide de produits infinis

Q 3) Démontrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ \mathrm{d}t.$$

Q 4) On pose, pour n entier naturel et pour $x \in]0,+\infty[$,

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\ \mathrm{d}u.$$

a) Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $I_n(x)$, déterminer, pour $x > 0$ et pour $n \geq 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

b) En déduire, pour n entier naturel et pour $x \in]0,+\infty[$ une expression de $I_n(x)$ comme un produit.

c) En déduire que, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

Q 5) Pour tout entier $n \geq 1$, on note toujours $H_n = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - \ln(n)$.
En remarquant que pour $n \geq 1$ et $x \in]0, +\infty[$,

$$\frac{1}{n^x} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) = e^{xH_n} \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{\frac{-x}{k}}\right],$$

démontrer la *formule de Weierstrass* suivante, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{\frac{-x}{k}}\right].$$

Expression de la fonction digamma comme somme d'une série

Q 6) a) Déduire de ce qui précède la fonction :

$$g : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right]$$

est bien définie sur $]0, +\infty[$, et l'exprimer en fonction de Γ et γ.

b) Démontrer que l'application g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$ comme somme d'une série de fonctions.

c) En déduire que, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\psi(x) = \frac{-1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + x}\right).$$

Une caractérisation de la fonction digamma

Q 7) a) Que vaut $\psi(1)$? En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) \mathrm{d}t.$$

b) Déterminer pour tout $x \in]0, +\infty[$ une expression très simple de $\psi(x+1) - \psi(x)$ en fonction de x, puis démontrer que, :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \quad \psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

c) Soit $x \in]0, +\infty[$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on définit une fonction

$$j_{k,x} : y \in]0, +\infty[\mapsto j_{k,x}(y) = \frac{1}{k + y + 1} - \frac{1}{k + y + x}.$$

Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} j_{k,x}$ converge uniformément par rapport à la variable $y \in]0, +\infty[$.
En déduire $\lim_{n \to +\infty} (\psi(x + n) - \psi(1 + n))$.

d) Déterminer l'ensemble des applications f définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs réelles vérifiant les trois conditions :

(1) $f(1) = -\gamma$,
(2) pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x + 1) = f(x) + \frac{1}{x}$,
(3) pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (f(x + n) - f(1 + n)) = 0$.

Propriétés asymptotiques de Digamma et Gamma

N.B. *Dans ce qui suit, on pourra utiliser librement la relation*

$$\forall\, x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

qui se prouve par intégration par partie sur la définition intégrale de Γ. *Compte tenu du fait que* $\Gamma(1) = 1$, *on en déduit que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$ *et on note* $\forall\, x > -1,\ x! = \Gamma(x+1)$.

Q 8) Une autre suite de fonctions qui converge vers ψ :

a) pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f_n(x) = \ln(x+n) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+x}$$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers ψ.

b) En déduire que :

$$\forall\, x > 0,\ \ln(x) - \frac{1}{x} \leq \psi(x) \leq \ln(x).$$

Q 9) a) Montrer que $\psi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.

b) En déduire qu'il existe un $x_0 > 0$ telle que $\Gamma_{|\ [x_0,+\infty[}$ est strictement croissante, puis que $\Gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma'(x)$.

Q 10) Vers la formule de Stirling continue :

a) Soit $H : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} H'(x) = 0$ et telle qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs vérifiant :

- ▷ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$,
- ▷ la suite $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,
- ▷ il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} H(a_n) = \ell$.

Démontrer que $H(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

b) Pour tout $x > 0$, on pose

$$F(x) = \ln\left(\frac{\Gamma(x+1)e^x}{x^{x+1/2}}\right)$$

Démontrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$,

$$-\frac{1}{2x} \leqslant F'(x) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x}$$

c) Conclure enfin que $x! := \Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(On admet la formule $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ pour n entier.)