Devoir surveillé 4 : une solution

Q1 à 7 : d'après CCINP MP 2016, mais beaucoup d'autres sujets sur le même thème à Mines Centrales aussi, d'où sont extraits aussi les Q 8 et 9.

Q 1) a) Soit $x > 0$. La fonction $h_x : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$ par produit de fonctions continues, les fonctions exponentielle et puissances étant bien continues sur $]0,+\infty[$. On a $h_x(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x < 1$ et $t^2e^{-t}t^{x-1} = t^{x+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, d'où $h_x(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Ainsi, par comparaison de fonctions positives et critère de Riemann en 0 et en $+\infty$, $h_x : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
On peut ainsi définir la fameuse fonction Gamma d'Euler $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$, sur $]0,+\infty[$.

b) Soit $x > 0$. La fonction h_x définie dans la question précédente est continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$. La positivité de l'intégrale nous donne $\int_0^{+\infty} h_x(t)dt \geq 0$ et la continuité de h_x implique qu'on ne pourrait avoir $\int_0^{+\infty} h_x(t)dt = 0$ que si h_x était identiquement nulle sur $]0,+\infty[$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} h_x(t)dt > 0$, et ce pour tout $x > 0$.

Q 2) Pour tout $n \geq 2$, on note $u_n = H_n - H_{n-1}$. On a $u_n = \dfrac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n} - \ln(1+\dfrac{1}{n}) = O(1/n^2)$ par le développement limité du logarithme.
Donc par théorème de comparaison, (u_n) est terme général de série (absolument) convergente.
Par lien suite série, comme la série $\sum(H_n - H_{n-1})$ converge, on conclut que la suite (H_n) converge.

Q 3) Pour $x \in]0,+\infty[$ et pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ si } t \in]0,n] \\ 0 \text{ si } t > n \end{cases}.$$

On note $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.
On va montrer que $J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x)$ à l'aide du théorème de convergence dominée de Lebesgue, en vérifiant les deux hypothèses ;
(H_1) pour chaque $t > 0$, $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-t}t^{x-1}$.
En effet $(1-\dfrac{t}{n})^n = e^{n\ln(1-\frac{t}{n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-t}$ d'après le D.L. de $\ln(1+u) = u + \underset{u\to 0}{o}(u)$.
(H_2) on sait par concavité du logarithme que : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$, puis

$$\forall x < 1, \ln(1-x) \leq -x$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0,n]$, $\ln(1-\dfrac{t}{n}) \leq -\dfrac{t}{n}$ donc par croissance de l'exponentielle et produit par une quantité positive :

$$f_n(t) \leq e^{n\times(-\frac{t}{n})}t^{x-1} = e^{-t}t^{x-1}$$

. Enfin f_n est nulle sur $[n,+\infty[$, tandis que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ y est positive, d'où finalement l'encadrement :

$$\forall t > 0, 0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}t^{x-1}.$$

La fonction majorante $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ par la Q1, et indépendante de n.
Avec (H_1) et (H_2) on applique le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x),$$

Q 4) a) (i) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.

La fonction $\alpha : u \mapsto (1-u)^n u^{x-1}$ est bien définie et continue sur $]\ 0{,}1]$.

De plus, $\alpha(u) \underset{u \to 0^+}{\sim} u^{x-1} = \frac{1}{u^{1-x}}$, avec $1 - x < 1$, donc α est intégrable sur $]0,\ 1]$ par comparaison de fonctions positives et critère de Riemann.

Cela assure la bonne définition de $I_n(x)$.

(ii) On définit maintenant sur $]0,1]$ les fonctions $\alpha_1 : u \mapsto (1-u)^n$ et $\alpha_2 : u \mapsto \frac{u^x}{x}$. Ces fonctions sont de classe C^1, et on a $\alpha_1(u)\alpha_2(u)$ qui admet une limite finie pour $u \longrightarrow 0^+$, en l'occurrence 0 . On en déduit, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_0^1 \alpha_1(u)\alpha_2'(u)du = \alpha_1(1)\alpha_2(1) - \lim_{u\to 0^+} \alpha_1(u)\alpha_2(u) - \int_0^1 \alpha_1'(u)\alpha_2(u)du \\ &= 0 - 0 + \frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^x du = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1) \end{aligned}$$

b) Soit $x > 0$.

On a $I_0(x) = \int_0^1 u^{x-1}du = \left[\frac{u^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$. Soit $n \geq 1$. On a, par une récurrence immédiate,

$$I_n(x) = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1) = \frac{n}{x}\times\frac{n-1}{x+1} I_{n-2}(x+2) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} I_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

c) La fonction $t \mapsto \frac{t}{n}$ réalise une bijection strictement croissante et de classe C^1 de $]0,n]$ sur $]0,\ 1]$. Via le changement de variable $u = \frac{t}{n}$, on obtient donc :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} ndu = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}du = n^x I_n(x)$$

Le résultat de la Q3) se réécrit ainsi : $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x I_n(x)$. Et le calcul de la question précédente permet de conclure :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x \times \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$$

Q 5) L'indication donnée (fallait-il la prouver ?) est immédiate en remarquant qu'on a :

$$e^{xH_n} = e^{x\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} e^{-x\ln(n)} = \left(\prod_{k=1}^n e^{\frac{x}{k}}\right) \times \frac{1}{n^x}.$$

On remarque que :

$$\frac{\prod_{k=0}^n (x+k)}{n!n^x} = \frac{x}{n^x} \times \frac{\prod_{k=1}^n (k+x)}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{x}{n^x}\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

Grâce à l'indication fournie, on en déduit que :

$$\frac{\prod_{k=0}^n (x+k)}{n!n^x} = xe^{xH_n}\prod_{k=1}^n \left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right].$$

Donc d'après la formule établie à la question précédente, on en déduit :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to+\infty} xe^{xH_n}\prod_{k=1}^n \left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right].$$

Or $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$ donc, par continuité de l'exponentielle, $e^{xH_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{x\gamma}$. Par produit de limite avec e^{-xH_n}, on en déduit que $\prod_{k=1}^n \left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]$ converge et :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^n \left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right].$$

Q 6) a) On note qu'on pourrait répondre directement à la question de l'existence de $g(x)$ à l'aide d'un DL d'ordre 2. Le t.g. est un $O(1/k^2)$.

Si l'on veut rester dans les clous du sujet, on commence par réécrire la formule précédente :

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\Gamma(x)xe^{\gamma x}}$$

Par continuité de ln, on en déduit :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ln\left(\frac{1}{\Gamma(x)xe^{\gamma x}}\right), \text{ i. e.}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\ln\left(\Gamma(x)xe^{\gamma x}\right).$$

En particulier, on a prouvé que la série $\sum_{k\geq1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]$ converge. Ceci ayant été démontré pour tout $x>0$, on a établi la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{k\geq1}g_k$ sur $]0,+\infty[$, où l'on pose $g_k : x\mapsto\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}$.

N.B. L'égalité $g(x)=-\ln\left(\Gamma(x)xe^{\gamma x}\right)$ sera utile au c).

b) **(M1)** On note $g=\sum_{k=1}^{+\infty}g_k$ sur $]0,+\infty[$.

(H1) On a la convergence simple de $\sum_{k>1}g_k$ vers g établie à la question précédente.

(H2) Les fonctions g_k sont toutes de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

(H3) Pour tout $k\geq1$, pour tout $x>0, g_k'(x)=\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k}=-\frac{x}{k(k+x)}$.

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$. On a donc $0<a\leq b$. Alors pour tout $k\geq1$ et tout $x\in[a,b], |g_k'(x)|\leq\frac{b}{k^2}$ et, comme $\sum_{k\geq1}\frac{b}{k^2}$ converge, on a établi la convergence normale, donc uniforme, de $\sum_{k\geq1}g_k'$ sur $[a,b]$.

Par le théorème sur le caractère $\mathcal{C}^1$ d'une limite, on en déduit :

(C) que g est de classe C^1, avec

$$\forall x>0, g'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}g_k'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k}\right).$$

(M2) Si on sait (après le chapitre I3 sur les intégrales à paramètres) que Γ est $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) grâce à l'écriture intégrale, l'expression $g(x)=-\ln\left(\Gamma(x)xe^{\gamma x}\right)$ donne immédiatement le caractère $\mathcal{C}^1$ de g, mais pas son écriture comme somme.

c) Par la question 6.a., on a, pour tout $x>0$,

$$g(x)=-\ln\left(\Gamma(x)xe^{\gamma x}\right)=-\ln(\Gamma(x))-\ln(x)-\gamma x.$$

Dérivant cette relation sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$g'(x)=-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}-\frac{1}{x}-\gamma,$$

c'est-à-dire, vu que $\psi=\frac{\Gamma'}{\Gamma}, \psi(x)=-g'(x)-\frac{1}{x}-\gamma$. Comme $-g'(x)=-\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{k+x}+\frac{1}{k}\right)$, on a finalement établi :

$$\forall x>0, \psi(x)=-\frac{1}{x}-\gamma+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right).$$

Q 7) a) Posant $x=1$ dans la formule précédente, on trouve : $\psi(1)=-1-\gamma+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$, d'où, par télescopage,

$$\psi(1)=-1-\gamma+1=-\gamma.$$

De plus $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=\lim_{X\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^X=\lim_{X\to+\infty}1-e^{-X}=1$ donc, vu que $\psi(1)=\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$, on obtient $\Gamma'(1)=-\gamma$. Mais en reprenant l'expression obtenue à la question 1.c., on constate que $\Gamma'(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln(t)dt$, d'où finalement :

$$\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln(t)dt=-\gamma$$

b) **(M1)** D'après la formule de la question 6.c., on a, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}\psi(x+1) - \psi(x) &= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1}\right) - \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+x}\right)\end{aligned}$$

par somme de séries convergentes. Et donc : $\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}\right) = \frac{1}{x}$.

(M2) On aurait aussi pu procéder ainsi :

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}\right)\right).$$

Or, il est bien connu que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (il suffit d'intégrer par parties), donc

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}.$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \psi(k+1) - \psi(k) = \frac{1}{k}$. Il s'ensuit, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1}(\psi(k+1) - \psi(k)) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

c) On peut réécrire $j_{k,x}(y) = \frac{k+y+x-k-y-1}{(k+y+1)(k+y+x)} = \frac{x-1}{(k+y+1)(k+y+x)}$ donc,

$$\forall y > 0, |j_k(y)| \leq \frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)} \text{majorant indépendant de } y.$$

Comme $\sum_{k>0}\frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)}$ est une série convergente, vu que $\frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{|x-1|}{k^2}$, on a la convergence normale, donc uniforme, de $\sum_{k\geq 0} j_{k,x}$ sur $]0, +\infty[$ comme demandé.
Ensuite, reprenant la formule de 6.c., on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\psi(x+n) - \psi(1+n) = -\frac{1}{x+n} + \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+n}\right) - \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1+n}\right),$$

et selon le même principe de calcul qu'à la question précédente, on aboutit à :

$$\psi(x+n) - \psi(1+n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+1+n} - \frac{1}{k+x+n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} j_{k,x}(n).$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}, j_{k,x}(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par le théorème de la double limite (qui s'applique ici car la série de fonctions étudiée converge uniformément sur un voisinage de $+\infty$),

$$\lim_{n\to+\infty}(\psi(x+n) - \psi(1+n)) = \sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} j_k(n) = 0.$$

d) . Par analyse-synthèse :
• **Analyse :** Soit f vérifiant $(1), (2), (3)$. On va montrer que f vérifie la formule de ψ établie en 6.c., à savoir :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$$

Puisque $\frac{1}{t} = f(t+1) - f(t)$ pour tout $t > 0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) &= \sum_{k=1}^{n}(f(k+1) - f(k) - f(k+x+1) + f(k+x)) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(f(k+1) - f(k)) + \sum_{k=1}^{n}(f(k+x) - f(k+x+1)) \\ &= f(n+1) - \underbrace{f(1)}_{=-\gamma} + f(1+x) - f(n+x+1)\end{aligned}$$

Compte-tenu de l'hypothèse (3), on peut passer à la limite quand $n \to +\infty$ dans cette égalité, pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) = f(x+1) - \gamma$$

En réutilisant l'hypothèse (2), on obtient :

$$f(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}),$$

autrement dit, vu 6)c) que :

$$\forall\, x > 0,\ f(x) = \psi(x)$$

• **Synthèse :** La seule solution éventuelle au problème est donc ψ. Mais on a prouvé en 7.a., 7.b. et 7 .c. que ψ satisfait les trois conditions voulues, donc finalement ψ est solution, et c'est la seule.

Q 8) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \ln(n+x) - \ln n + \ln n \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+x} \\ &= \ln\left(\frac{n+x}{n}\right) - H_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)\end{aligned}$$

Ainsi par somme de limites :

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) = \psi(x).$$

b) Pour encadrer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+x}$ on utilise la méthode d'encadrement par des intégrales : La fonction $t \mapsto \frac{1}{t+x}$ est continue, positive et décroissante sur $[0, +\infty[$. Par encadrement, on obtient

$$\int_k^{k+1}\frac{dt}{t+x} \leqslant \frac{1}{k+x} \qquad \text{pour tout } k \geqslant 0$$

et, par sommation de 0 à $n-1$, on a

$$\int_0^n \frac{dt}{t+x} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+x}$$

De même, par encadrement, on obtient

$$\frac{1}{k+x} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t+x} \qquad \text{pour tout } k \geqslant 1$$

et, en sommant de 1 à $n-1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+x} \leqslant \int_0^{n-1}\frac{dt}{t+x} + \frac{1}{x}$$

Ainsi, pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^n \frac{dt}{t+x} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+x} \leqslant \int_0^{n-1} \frac{dt}{t+x} + \frac{1}{x}$$
$$\ln\left(\frac{n+x}{n-1+x}\right) + \ln x - \frac{1}{x} \leqslant f_n(x) \leqslant \ln x$$

pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\ln x - \frac{1}{x} \leqslant \psi(x) \leqslant \ln x \qquad \text{pour tout } x > 0$$

Q 9) a) Avec l'encadrement précédent 8) b), par théorème des gendarmes pour les équivalents, on a bien $\psi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.

b) Le a) montre en particulier que $\psi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc qu'on a un x_0 tel que $\psi_{|[x_0,\infty[} > 0$.
Or $\psi = \Gamma'/\Gamma$ et on a montré que $\Gamma > 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $\Gamma'_{|[x_0,\infty[} > 0$ ce qui donne bien la première conclusion : Γ est strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$.
Comme Γ est strictement croissante, par théorème de la limite monotone, on sait que $\Gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0, +\infty]$.
Mais alors par composition des limites $\Gamma(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Or comme précisé par l'énoncé $\Gamma(n+1) = n!$ donc $\ell = +\infty$ et la conclusion : $\Gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Remarque : on verra un argument beaucoup plus simple à partir de la seule écriture intégrale de Γ au chapitre I3.

c) Comme $\Gamma'(x) = \Gamma(x)\psi(x)$, on conclut que $\Gamma'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par produit dont les deux facteurs tendent vers $+\infty$.

Q 10) a) **Question qui demande une bonne maîtrise des ε**
La suite $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive bornée, donc il existe un $\geqslant 0$ tel que

$$0 < a_{n+1} - a_n \leqslant M \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} H(a_n) = \ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad |H(a_n) - \ell| \leqslant \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{M+1}$$

Par ailleurs, on a $\lim_{x\to+\infty} H'(x) = 0$, donc il existe $A > a_{n_0}$ tel que $|H'(x)| \leqslant \varepsilon'$ pour tout $x \geqslant A$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall\, (x,y) \in [A, +\infty[^2, \quad |H(x) - H(y)| \leqslant \varepsilon'.|x-y|$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant strictement croissante, pour chaque $x \in [A, +\infty[$, il existe un unique entier $q \geqslant n_0$ tel que $a_q \leqslant x < a_{q+1}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
|H(x) - \ell| &= |H(x) - H(a_q) + H(a_q) - \ell| \\
&\leqslant |H(x) - H(a_q)| + |H(a_q) - \ell| \\
&\leqslant \varepsilon' |x - a_q| + \varepsilon' \\
&\leqslant \varepsilon' (a_{q+1} - a_q) + \varepsilon' \\
&\leqslant (M+1)\varepsilon' = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Finalement, on a montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \geqslant 0$ tel quepour tout $x \geqslant A$, $|H(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = \ell$.

b) Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \ln\left(\frac{\Gamma(x+1)e^x}{x^{x+1/2}}\right) \\
&= \ln(\Gamma(x+1)) + x - \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln x
\end{aligned}$$

On a admis plus haut que Γ était $\mathcal{C}^1$ et $\Gamma > 0$ donc F est bien définie, donc par théorème d'opération F est $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall\, x > 0,\; F'(x) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} + 1 - \ln(x) - \frac{x + \frac{1}{2}}{x}$$

Donc par déf. de $\psi = \Gamma'/\Gamma$, on a :

$$\forall\, x > 0,\; F'(x) = -\frac{1}{2x} - \ln x + \psi(x+1)$$

Or l'encadrement du 8 b) donne :

$$\forall\, x > 0, \quad \ln(1+x) - \frac{1}{x+1} \leq \psi(x+1) \leq \ln(x+1)$$

ce qui dans l'expression de $F'(x)$ donne :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x} \leqslant F'(x) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x}$$

pour tout $x > 0$.

Une étude de fonction montre que $\forall\, x > 0$, $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \geq 0$ ce qui montre l'encadrement demandé :

$$-\frac{1}{2x} \leqslant F'(x) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x}$$

c) On déduit de l'encadrement précédent que $F'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On pose $a_n = n$ pour tout n, ce qui en fait une suite strictement croissante qui tend vers $+\infty$ et $(a_{n+1} - a_n)$ est constante égale à 1 donc bornée.

D'après la Q10 a) on sait donc que si $F(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Or

$$\begin{aligned} F(a_n) &= \ln\left(\frac{\Gamma(n+1)e^n}{n^{n+1/2}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(\sqrt{2\pi}) \end{aligned}$$

par la formule de Stirling en variable $n \in \mathbb{N}$. Donc la Q10 a) permet de conclure que :

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \ln(\sqrt{2\pi})$$

, donc par continuité de exp :

$$\frac{\Gamma(x+1)e^x}{x^{x+1/2}} \underset{x\to+\infty}{\to} \sqrt{2\pi},$$

et, puisque $\sqrt{2\pi} \neq 0, \Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi}e^{-x}x^{x+1/2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.