D.M. 7 : solution.

Partie I : obtention de Dunford via la méthode de Newton

Q20) La méthode de Newton pour la recherche des zéros d'une fonction d'une variable réelle :

a) Démontrons d'abord par récurrence l'existence et la monotonie de la suite. On note, comme dans l'énoncé, r l'unique zéro de f dans $I = [a,b]$. Considérons la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante :

$$\mathcal{P}(n) : x_n \text{ existe et } r \leqslant x_n \leqslant x_{n-1} \ldots \leqslant x_0 = b$$

• $\mathcal{P}(0)$ est triviale : x_0 existe.

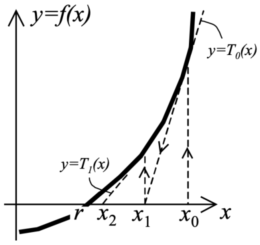
• Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Comme $x_n \in I$, $f(x_n)$ et $f'(x_n)$ sont bien définis et donc la tangente T_n au graphe de f en ce point aussi d'abscisse x_n aussi. L' équation de T_n est :

$$y = f(x_n) + f'(x_n).(x - x_n).$$

Alors le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisse a pour abscisse $x = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ autrement dit pour abscisse : x_{n+1}.

Montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie consiste donc à montrer que T_n intersecte l'axe des abscisses en un point du segment $[r, x_n]$.

- Or comme $r \leq x_n$ et f est croissante, on sait que $0 \leq f(x_n)$. Donc comme T_n est de pente strictement positive, on a bien $x_{n+1} \leq x_n$.
- Comme f est convexe, la droite T_n est sous le graphe de f, donc $0 \leq f(x_{n+1})$ donc $r \leq x_{n+1}$.



Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée et la récurrence est établie.

b) La suite (x_n) est décroissante, minorée par r, donc converge. Notons ℓ sa limite. Par continuité de l'application $g : x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$, on a, en passant à la limite, $\ell = g(\ell)$.

Or $\ell = g(\ell) \Leftrightarrow f(\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell = r$.

Ainsi $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r}$

Q21) Adaptation de cette méthode dans le cadre matriciel pour trouver la matrice D de la décomposition de Dunford d'une matrice A.

a) Si $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{m_i}$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ deux à deux distinctes, alors

$$\chi_A'(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{m_i - 1}.Q(X)$$

où Q est un polynôme n'admettant aucune des λ_i pour racine (sinon la multiplicité de ce λ_i dans χ_A serait strictement plus grande que m_i) Donc $Q \wedge \chi_A = 1$. Mais alors :

$$\chi_A \wedge \chi_A' = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{m_i - 1}$$

et donc

$$\frac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi_A'} = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)$$

Cette formule donne un calcul facile du polynôme simplement scindé ayant les mêmes racines que χ_A.

b) Initialisation : (i) Ici $A_0 = A$, montrons que $P(A)$ est nilpotente d'indice $\nu_0 \leq n$.
Avec la forme scindée qu'on a trouvée, $P = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)$, on a $P^n = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^n$ et donc $\chi_A | P^n$ car tous les m_i sont bien sûr inférieurs à $n = \deg(\chi_A)$.
Par Cayley-Hamilton, on en déduit que $P(A)^n = 0$, d'où la propriété $(P1)$ pour $r = 0$.
(ii) On a vu que P est scindé à racines simples donc $P \wedge P' = 1$ et puisque P et χ_A et μ_A ont les mêmes racines, on en déduit que $\mu_A \wedge P' = 1$ donc on a une relation de Bézout $U.\mu_A + VP' = 1$. En évaluant en A :

$$V(A)P'(A) = I$$

donc $P'(A)$ est inversible, d'où la propriété $(P2)$ pour $r = 0$.
(iii) Avec le (ii), on sait que $P'(A_0)^{-1}$ bien définie, donc

$$A_1 = A - P(A)P'(A)^{-1} \quad (*)$$

est bien définie.
Au (ii) on a aussi vu que l'inverse de $P'(A)$ était $V(A) \in \mathbb{C}[A]$. Donc dans $(*)$ tous les termes sont des polynômes en A, et donc $A_1 \in \mathbb{C}[A]$. D'où la propriété $(P3)$ pour $r = 0$.

c) **Démonstration de la formule admise : la formule de Taylor très formellement**
On note $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
On considère une deuxième indéterminée Y (qu'on remplacera ensuite par $S(X)$).
Alors $P(X+Y) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+Y)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^{k-i} Y^i) = \sum_{i=0}^{n} Y^i \sum_{k=i}^{n} a_k \binom{k}{i} X^{k-i} = \sum_{i=0}^{n} Y^i c_i(X.Y) \quad (*)$.
En considérant attentivement les coefficients $c_i(X,Y)$ de Y^i, on remarque que :

$$c_0(X,Y) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = P(X) \quad \text{et} \quad c_1(X,Y) = \sum_{k=1}^{n} a_k k X^{k-1} = P'(X).$$

Donc $(*)$ devient :

$$P(X+Y) = P(X) + YP'(X) + Y^2 \sum_{i=2}^{n} Y^{i-2} \sum_{k=i}^{n} a_k \binom{k}{i} X^{k-i} = P(X) + YP'(X) + Y^2 R(X,Y).$$

On applique cette formule à $Y = S(X)$, et on a :

$$P(X+S(X)) = P(X)+S(X)P'(X)+S(X)^2 R(X,S(X)) = P(X)+S(X)P'(X)+S(X)^2 Q(X).$$

Application à la question posée : en évaluant cette formule en A_r, et en prenant $S(X) = -P(X)V(X)$ où V polynôme tel que $P'(A_r)^{-1} = V(A_r)$, on obtient :

$$P(A_r - P(A_r).P'(A_r)^{-1}) = P(A_r) - P(A_r)P'(A_r)^{-1}P'(A_r) + P(A_r)^2 V(A_r)^2 Q(A_r)$$

Autrement dit :

$$P(A_{r+1}) = P(A_r)^2 V(A_r)^2 Q(A_r)$$

Comme par H.R. $P(A_r)$ est nilpotente, et que toutes ces matrices commutent car elles sont dans $\mathbb{C}[A]$, on en déduit que $P(A_{r+1})$ est nilpotente.
En outre (suivante la parité de ν_r) :

— si ν_r est pair, alors $P(A_{r+1})^{\nu_r/2} = P(A_r)^{\nu_r} V(A_r)^{\nu_r} Q(A_r)^{\nu_r/2} = 0$,

— si ν_r est impair, $P(A_{r+1})^{(\nu_r+1)/2} = P(A_r)^{\nu_r+1} V(A_r)^{\nu_r+1} Q(A_r)^{(\nu_r+1)/2} = 0$.

Dans tous le cas on conclut que l'indice de nilpotente ν_{r+1} vérifie $\nu_{r+1} \leq \dfrac{\nu_r+1}{2}$.

Cette relation donne bien, sachant que $\nu_r \leq 1 + \dfrac{n-1}{2^r}$, que $\nu_{r+1} \leq 1 + \dfrac{n-1}{2^{r+1}}$.

On a donc prouvé que (P1) est vraie à l'ordre $r+1$.

d) Il reste à montrer que (P2) et (P3) sont vraies à l'ordre $r+1$.
Comme $P \wedge P' = 1$, par Bézout, on a une relation $UP + VP' = 1$ donc en évaluant en A_r, on a $P'(A_r)V(A_r) = I - U(A_r)P(A_r)$.
Comme $P(A_r)$ est nilpotente, $U(A_r)P(A_r)$ est nilpotente, donc la seule valeur propre de $I - U(A_r)P(A_r)$ est 1 donc cette matrice est inversible.
Ainsi $P'(A_r)V(A_r)$ est inversible et en particulier $P'(A_r)$ est inversible, ce qui prouve (P2).
La propriété (P3) se démontre alors comme pour fait pour l'initialisation.

e) Conclusion : soit m tel que $(n-1)/2^m < 1$. Alors $\nu_m < 2$ et comme ν_m est un entier naturel non nul, $\nu_m = 1$ et donc $P(A_m) = 0$.
Comme P est scindé à racines simples, on en déduit que A_m est diagonalisable.
D'autre part $A - A_m = (A_0 - A_1) + (A_1 - A_2) + \cdots + (A_{m-1} - A_m)$
Donc $A - A_m = P(A_0)P'(A_0)^{-1} + P(A_1)P'(A_1)^{-1} + \cdots + P(A_{m-1})P'(A_{m-1})^{-1}$ est une somme de matrices nilpotentes qui commutent donc $A - A_m$ est nilpotent.
Comme $A_m \in \mathbb{C}[A]$, on sait que A_m et $(A - A_m)$ commutent.
Donc $A_m = D$ de la décomposition de Dunford.

Partie II : continuité des valeurs propres et Gerschgorin

Q0) Comme dans un e.v.n. de dim. finie, ici dans $\mathbb{C}_n[X]$, toutes les normes sont équivalentes, on peut considérer la convergence « coordonnée par coordonnée » dans la base canonique (qui est visiblement la convergence pour la norme infinie des coefficients dans cette base).
Alors pour chaque i, $X - \lambda_{k,i} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} X - \lambda_i$ dans $\mathbb{C}_n[X]$.
En choisissant une norme d'algèbre, on sait que le produit est continu, et donc on déduit de ce qui précède que :

$$\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_{k,i}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i),$$

ce qu'on voulait démontrer.

Q1) a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $R > |z|$, en particulier $R > 0$. Comme la $\|\ \|_\infty$ sur le disque fermé $D_f(0,R)$ définie par $\forall\, P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\|P\|_\infty = \sup_{w \in D_f(0,R)} |P(w)|$ est une norme dans $\mathbb{C}_n[X]$ (pour la séparation, on sait que si un polynôme P est nul sur $D_f(0,R)$ il est nul partout puisqu'il a une infinité de zéros) et que toutes les normes dans cet espace de dimension finie sont équivalentes, l'hypothèse $P_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P$ donne donc que :

$$\|P_k - P\|_\infty \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Or pour notre z fixé précédemment, on a bien sûr :

$$|P_k(z) - P(z)| \leq \|P_k - P\|_\infty$$

donc par majoration :

$$P_k(z) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P(z)$$

b) Comme $|\lambda_1 - \lambda_{k,i_k}|$ est minimal parmi les $|\lambda_1 - \lambda_{k,i}|$, on a

$$0 \leq |\lambda_1 - \lambda_{k,i_k}|^n \leq \prod_{i=1}^{n} |\lambda_1 - \lambda_{k,i}| = |P_k(\lambda_1)|. \quad (*)$$

Comme on a vu au a) que $P_k(\lambda_1) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P(\lambda_1) = 0$, on déduit de $(*)$ que par majoration ;

$$|\lambda_1 - \lambda_{k,i_k}|^n \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et comme n est fixé, indépendant de k :

$$\lambda_{k,i_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_1$$

c) On va montrer la convergence coefficient par coefficient.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $m \in [\![0,n]\!]$, on note :

$$P_k = \sum_{m=0}^{n} a_{k,m}X^m, \quad \text{et} \quad P = \sum_{m=0}^{n} a_m X^m$$

avec $a_{k,n} = a_n = 1$ et :

$$Q_k = \sum_{m=0}^{n-1} b_{k,m}X^m, \quad \text{et} \quad Q = \sum_{m=0}^{n-1} b_m X^m$$

avec $b_{k,n-1} = b_{n-1} = 1$.
L'identité $P_k = (X - \lambda_{k,1})\, Q_k$ donne par identification des coefficients dans la base canonique :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall m\ \in [\![0,n]\!],\ a_{k,m} = b_{k,m-1} - \lambda_{k,1}b_{k,m}.$$

en posant $b_{k,-1} = 0$ pour donner du sens à cette égalité si $m = 0$.
Autrement dit :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall m\ \in [\![0,n]\!],\ b_{k,m-1} = a_{k,m} + \lambda_{k,1}b_{k,m}$$

ce qu'on réécrit :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall m\ \in [\![0,n-1]\!],\ b_{k,m} = a_{k,m+1} + \lambda_{k,1}b_{k,m+1}$$

A partir du cas $m = n-1$ où $b_{k,n-1} = a_{k,n} = 1$, on en déduit :

$$b_{k,n-2} = a_{k,n-1} + \lambda_{k,1}$$

puis une récurrence descendante sur m donne :

$$\forall m\ \in [\![0,n-1]\!],\ b_{k,m} = a_{k,m+1} + a_{k,m+2}\lambda_{k,1} + a_{k,m+3}\lambda_{k,1}^2 + \cdots + a_{k,n-1}\lambda_{k,1}^{n-m-2} + \lambda_{k,1}^{n-m-1} \quad (*)$$

Or de même la relation $P = (X - \lambda_1)Q$ donne les égalités : :

$$\forall m\ \in [\![0,n-1]\!],\ b_m = a_{m+1} + a_{m+2}\lambda_1 + a_{m+3}\lambda_1^2 + \cdots + a_{n-1}\lambda_1^{n-m-2} + \lambda_1^{n-m-1} \quad (**)$$

Or la convergence de $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers P et de $(\lambda_{k,1})_{k\in\mathbb{N}}$ vers λ_1 dit que le membre de droite de $(*)$ converge vers le membre de droite de $(**)$ quand $k \to +\infty$.
Il en est donc de même des membres de gauche i.e. $\forall m\ \in [\![0,n-1]\!], b_{k,m} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} b_m$.
Donc $Q_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} Q$ dans $\mathbb{C}_n[X]$.

d) Montrons le résultat demandé par une récurrence sur le degré n. Pour $n = 1$, il n'y a rien à dire. Pour l'hérédité, on a déjà réordonné les racines des P_k de sorte que la suite $(\lambda_{k,1})_k$ tende vers λ_1. Comme $(Q_k)_k$ est une suite de polynômes unitaires tendant vers Q, on applique la récurrence pour réordonner les $n-1$ racines des Q_k de sorte qu'elles tendent vers les $n-1$ racines de Q. Comme les racines (avec multiplicité) de P_k, resp. P, sont obtenues par adjonction de $\lambda_{k,1}$, resp. λ_1, aux racines de Q_k, resp. Q, le tour est joué.

Q2) C'est juste une interprétation du résultat précédent en notant que les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique (polynôme unitaire de degré n) et que l'application $M \mapsto \chi_M$ est continue, comme déjà démontré sur la planche T2 et qu'on doit réexpliquer ici.

Pour chaque matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ $\chi_A(X) = \sum_{k=0}^{n} c_k(A)X^k$.où chaque c_k est un polynôme en les coefficients de la matrice. En effet, on connaît bien c_0, c_{n-1} mais on peut être assez explicite sur ces polynômes c_k en fait.

Si on écrit $A = (C_1 \dots C_n)$ où les C_i sont les vecteurs colonnes de A, et $(E_i)_{i=1,\dots,n}$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ Alors : $\chi_A = \det(XE_1 - C_1, \dots, XE_n - C_n)$ qui après développement est égal à :

$$\chi_A = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \sum_{i=2}^{n-2}(-1)^{n+k}\Delta_k X^k + (-1)^{n+1}X\sum_{i=1}^{n}\det(C_1, \dots, C_{i-1}, E_i, C_i+1, \dots, C_n) + (-1)^n \det(A)$$

$$\text{où } \Delta_k = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n}^{n} \det(C_1, \dots, E_{i_1}, \dots\dots, E_{i_k}, \dots, C_n)$$

où les indices $i_1, \dots, i_k$ correpondent à ceux pour lesquels la colonne correspondante de A est remplacée par une colonne de la base canonique. Et là on voit bien que chaque Δ_k est un polynôme en des entrées de A.

Ainsi, on a bien montré que $A \mapsto \chi_A(X) = \sum_{k=0}^{n} c_k(A).X^k$ est continue et donc si $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} A$ alors $\chi_{A_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_A$ dans $\mathbb{C}_n[X]$. On applique alors le résultat du 1) à cette suite.

Q3)
- Réflexivité : soit $a \in A$ et $c : [0,1] \to A$, $t \mapsto a$ arc constant. On a bien c continu et $c(0) = c(1) = a$, donc $a \sim a$.
- Symétrie : soient $a, b \in A$ tels que $a \sim b$. On a donc $c \in \mathcal{C}([0,1], A)$ tel que $c(0) = a$ et $c(1) = b$.
  Soit $\gamma \in \mathcal{C}([0,1], A)$, $t \mapsto \gamma(t) := c(1-t)$. On a $\gamma(0) = b$ et $\gamma(1) = a$ donc $b \sim a$.
- Transitivité : soient a, b, c dans A tels que $a \sim b$ et $b \sim c$.
  On a donc un arc $c_1 \in \mathcal{C}([0,1], A)$ et un arc $c_2 \in \mathcal{C}([0,1], A)$ tels que $c_1(0) = a$, $c_1(1) = b$, $c_2(0) = b$ et $c_2(1) = c$.
  On définit alors un arc $c \in \mathcal{C}([0,1], A)$ par $\forall\, t \in [0, 1/2]$, $c(t) = c_1(2t)$ et $\forall\, t \in [1/2, 1]$, $c(t) = c_2(2t-1)$, définitions cohérentes qui donnent toutes les deux $c(1/2) = b$. Alors, justement grâce à cette cohérence en $1/2$, on a bien $c \in \mathcal{C}([0,1], A)$ et $c(0) = a$ et $c(1) = c$. Donc $a \sim c$.

Q4)
a) Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$ et chaque $t \in [0,1]$, le i-ième disque de Gerschgorin de $\Gamma(t)$ est le disque fermé de centre $a_{i,i}$ et de rayon $t\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$. Comme $t \in [0,1]$ ce disque est inclus dans le i-ième disque de Gershgorin de A.
Autrement dit $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{D}_i(\Gamma(t)) \subset \mathcal{D}_i(A)$ donc en prenant la réunion :

$$\mathcal{D}(\Gamma(t)) \subset \mathcal{D}(A)$$

et ceci pour tout $t \in [0,1]$.

b) Chaque C_j est une réunion finie de disques fermés donc est un fermé de $\mathbb{C}$. En particulier C_j est un fermé de $\mathcal{D}(A)$. Mais comme $\mathcal{D}(A)$ est la réunion disjointe des C_j et que chaque C_j est fermé dans $\mathcal{D}(A)$, on sait que chaque C_j est aussi *ouvert* dans $\mathcal{D}(A)$ comme complémentaire de $\bigcup_{i\neq j} C_i$ (fermé comme union finie de fermés).

c) Comme $\lambda \in C_j$ et que, par la question précédente, C_j est un ouvert relatif de $\mathcal{D}(A)$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $D_0(\lambda, \varepsilon) \cap \mathcal{D}(A) \subset C_j$. Or par définition de la convergence d'une suite, on a un k_0 tel que $\forall\, k \ge k_0$, $\lambda_k \in D_0(\lambda, \varepsilon)$. Et comme les λ_k sont par hypothèse dans $\mathcal{D}(A)$, on a $\forall\, k \ge k_0$, $\lambda_k \in D_0(\lambda, \varepsilon) \cap \mathcal{D}(A)$ et donc $\forall\, k \ge k_0$, $\lambda_k \in C_j$.

d) (i) Par définition $\Gamma(0) = \mathrm{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$ donc les v.p. de $\Gamma(0)$ sont les centres des disques, or il y a (en répétant suivant la mult. algéb), n_j disques dans C_j donc $\Gamma(0)$ admet bien n_j v.p. dans C_j et $0 \in I$.

(ii) Montrons que $t_0 \in I$. On sait qu'il existe une suite d'éléments de $(t_k)_k$ de I qui tend vers t_0. La suite $(A(t_k))$ tend vers $A(t_0)$. Donc, par la Q2), on peut réordonner les valeurs propres des $A(t_k)$ de sorte qu'elles tendent vers les valeurs propres de $A(t_0)$. Comme t_k est dans I pour tout k, il existe n_j valeurs propres de $A(t_k)$ dans C_j.

Or comme $\mathcal{D}(A)$ est la réunion disjointe des C_j et que chaque C_j est ouvert dans $\mathcal{D}(A)$, on sait que chaque C_j est aussi *fermé* dans $\mathcal{D}(A)$ comme complémentaire de $\bigcup_{i\neq j} C_i$ (ouvert comme union d'ouvert).

Mais alors les limites des n_j valeurs propres de $A(t_k)$ qui se situent dans C_j sont encore dans C_j puisque C_j est un fermé dans $\mathcal{D}(A)$. De plus, comme cela est vrai pour tout j et qu'il est clair que $\sum_j n_j = n$, il existe exactement n_j valeurs propres de $A(t_0)$ dans C_j donc $t_0 \in I$, ce qu'il fallait démontrer.

(iii) Montrons par l'absurde que $t_0 = 1$, ce qui achèvera la preuve, puisque $t_0 \in I$. Supposons $0 \le t_0 < 1$. Il existe une suite (A_k), avec $A_k = A\left(t_0 + \frac{1}{k}\right)$, pour $k \ge \frac{1}{1-t_0}$, qui converge vers $A(t_0)$. Donc, encore par la Q2, on peut réordonner les valeurs propres des A_k de sorte qu'elles tendent vers les valeurs propres de $A(t_0)$. Par la question précédente, on trouve, pour tout j, au moins n_j valeurs propres dans C_j à partir d'un certain rang, donc exactement n_j valeurs propres dans C_j, comme précédemment. Il en résulte que $t_0 + \frac{1}{k}$ est dans I à partir d'un certain rang, ce qui est en contradiction avec la maximalité de t_0, ouf !