MP **Samedi 16 novembre 2024**

Devoir surveillé 3 (4h)

Les candidates et candidats attacheront la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si une personne est amenée à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, elle le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'elle a été amenée à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

— Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
— Ne pas utiliser de correcteur.
— Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
— Les calculatrices sont interdites.

Notation : K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On admet au I et II, le théorème suivant qu'on démontrera au III et IV.

Théorème de décomposition de Dunford : si A est une matrice de $M_n(\mathrm{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur K , alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $M_n(\mathrm{K})$ vérifiant les quatre propriétés :

(1) $A = D + N$;

(2) D est diagonalisable dans $M_n(\mathrm{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;

(3) N est nilpotente ;

(4) $DN = ND$.

De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$. Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A.

Partie I - Quelques exemples

Q 1) a) Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $M_n(\mathrm{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $M_n(\mathrm{K})$ est nilpotente.

b) Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.

c) Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$? Si non, préciser cette décomposition.

Q 2) Montrer que si χ_A n'est *pas* scindé dans $M_n(\mathrm{K})$ alors A n'admet pas de décomposition de Dunford dans $M_n(\mathrm{K})$. Donner un exemple d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.

Q 3) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. Calculer son polynôme caractéristique χ_A, puis donner le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de A.

Q 4) **Application :** pour $A \in M_n(\mathrm{K}), \exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ est l'exponentielle de la matrice A. On admet ici que si M et N sont deux matrices de $M_n(\mathrm{K})$ qui commutent,

$$\exp(M + N) = (\exp M)(\exp N).$$

Déduire de la question précédente l'exponentielle de la matrice A définie en Q 3).

Q 5) Soit $A \in M_n(\mathrm{K})$ telle que $A^2 (A - I_n) = 0$. Justifier que le polynôme $X(X-1)$ est annulateur de la matrice A^2. Démontrer que le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par : $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

Q 6) La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{id})^2$.

Q 7) Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que : $\ker(u-\mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_1\}$, $\ker(u-2\mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_2\}$ et $\ker(u - 2\mathrm{id})^2 = \mathrm{vect}\{e_2, e_3\}$. Écrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Q 8) Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A.

Q 9) Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}$ et en déduire deux polynômes U et V tels que :

$$(X-1)U(X) + (X-2)^2 V(X) = 1 \text{ avec } \deg U < 2 \text{ et } \deg V < 1$$

Q 10) On pose les endomorphismes : $p = V(u) \circ (u - 2\mathrm{id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \mathrm{id})$. Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que p est le projecteur sur $\ker(u - \mathrm{id})$ parallèlement à $\ker(u - 2\mathrm{id})^2$ et q est le projecteur sur $\ker(u - 2\mathrm{id})^2$ parallèlement à $\ker(u - \mathrm{id})$.

Q 11) On pose $d = p + 2q$. Écrire la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ (de la question Q7). Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

Partie III - Une preuve de l'existence de la décomposition

Q 12) Montrer que si E est un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ est tel que $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ distinctes alors $E = \oplus_{i=1}^{p} \ker(u - \lambda_i \,\mathrm{id}_E)^{m_i}$ $\quad (*)$.

Q 13) En notant $\pi_1, \ldots, \pi_p$ les projecteurs associés à la décomposition $(*)$, on admet que ces projecteurs sont dans $K[u]$. En déduire une démonstration de l'existence d'un couple (D, N) vérifiant toutes les conclusions dans le théorème de décomposition de Dunford.

Partie IV - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q 14) Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leq i \leq p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i. Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v. En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v. Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pourra noter v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.

Q 15) Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathrm{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.

Q 16) Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathrm{K})$ qui commutent, démontrer que la matrice $A - B$ est nilpotente.

Q 17) Établir l'unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.

Partie V - Non continuité de l'application $A \mapsto D$

Q 18) On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui sont diagonalisables. $\mathscr{D}$ est-il un espace vectoriel ? Si P est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$, justifier que l'application de $M_n(\mathbb{C})$ vers $M_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue.

Q 19) On admet que $\mathscr{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$. Si (D, N) est le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A, on note φ l'application de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathscr{D}$ qui à la matrice A associe la matrice D. Justifier que φ est l'application identité sur $\mathscr{D}$ et en déduire que l'application φ n'est pas continue.

Partie VI : à la maison une approche via la méthode de Newton

Q 20) **La méthode de Newton pour la recherche des zéros d'une fonction d'une variable réelle : Hypothèses :** soient $a < b$ deux réels et on $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifie les conditions suivantes :

- f' ne s'annule pas sur $[a,b]$, donc f est strictement monotone sur $[a,b]$.
- $f(a).f(b) < 0$ de sorte que f admet un unique zéro r dans $[a,b]$.
- f'' garde un signe constant sur $[a,b]$.

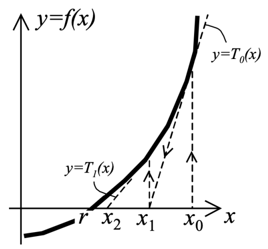
N.B. Pour simplifier pour la suite on supposera $f' > 0$ et $f'' > 0$ sur $[a,b]$, les autres cas se traitant mutatis mutandis.

On fixe un $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) > 0$.

Montrer que

a) La suite (x_n) définie par ce x_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et est décroissante. Le sens géométrique de cette formule est donné par le dessin ci-dessous.

b) Cette suite (x_n) converge vers l'unique zéro de f sur $[a,b]$.



Q 21) Adaptation de cette méthode dans le cadre matriciel pour trouver la matrice D de la décomposition de Dunford d'une matrice A.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ qu'on décompose en $A = D + N$ avec D dz et N nilpotente, avec $DN = ND$.

On pose $P = \dfrac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi_A'}$ et l'on considère la suite $(A_r)_{r\in\mathbb{N}}$ de matrices donnée par :

$$A_0 = A, \ \forall, r \in \mathbb{N}, \ A_{r+1} = A_r - P(A_r).P'(A_r)^{-1}$$

On va montrer que cette suite est bien définie, et qu'elle est constante égale à D à partir d'un certain rang.

Pour cela, on va montrer par récurrence sur $r \geq 0$ les trois prop. suivantes :

(P1) La matrice $P(A_r)$ est nilpotente d'indice de nilpotence $\nu_r \leq 1 + \dfrac{n-1}{2^r}$,

(P2) la matrice $P'(A_r)$ est inversible,

(P3) la matrice A_{r+1} est bien définie et appartient à $\mathbb{C}[A]$.

a) Si $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{m_i}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ deux à deux distinctes, expliciter $P = \dfrac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi_A'}$ en fonction des λ_i.

b) Initialisation : montrer que les trois propriétés (P1), (P2), (P3) sont vraies pour $r = 1$.

c) On admet la formule suivante, conséquence de la formule de Taylor pour les polynômes. $\forall\, P, S \in \mathbb{C}[X] \ \exists\, Q \in \mathbb{C}[X]$:

$$P(X + S(X)) = P(X) + S(X)P'(X) + S(X)^2 Q(X)$$

A l'aide de cette formule, en supposant que les trois propriétés (Pi) sont vraies pour un $r \geq 1$, montrer que $(P1)$ est vraie pour $r + 1$.

d) Finir la récurrence.

e) Conclure.