Devoir surveillé 3, d'après CCINP MP 2021 (4h)

Partie I - Quelques exemples

Q 1) Soit $A \in M_n(K)$.

a) (i) Si A est diagonalisable, $(D, N) = (A, 0)$ est la décomposition de Dunford de A.
En effet, $D = A$ est diagonalisable, $N = 0$ est nilpotente, $DN = ND = 0$ et $A = A + 0 = D + N$.

(ii) Si A est nilpotente, $(D, N) = (0, A)$ est la décomposition de Dunford de A.
En effet, $D = 0$ est diagonalisable, $N = A$ est nilpotente, $DN = ND = 0$ et $A = 0 + A = D + N$.

b) Soit A une matrice trigonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ inversible et $T \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure, telles que $P^{-1}AP = T$. Les matrices A et T sont semblables donc ont même polynôme caractéristique : $\chi_A = \chi_T$. Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ les coefficients diagonaux de la matrice T. Puisque T est triangulaire, $\chi_T(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ est scindé sur $\mathbb{K}$. Donc $\chi_A = \chi_T$ est scindé sur $\mathbb{K}$. Une matrice trigonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ vérifie l'hypothèse du théorème donc admet une décomposition de Dunford.

c) (i) Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. D' est diagonalisable (car diagonale), N' est nilpotente (car $(N')^2 = 0$), $A = D' + N'$, cependant D' et N' ne commutent pas :

$$D'N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq N'D' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc non : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ n'est pas la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ car ces deux matrices ne commutent pas.

(ii) De plus, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ possède deux valeurs propres distinctes 1 et 2 , donc est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$, donc $(D, N) = (A, 0)$ est la décomposition de Dunford de A.

Q 2) (i) Soit A telle que χ_A n'est pas scindé. Par l'absurde si A admet une décomposition de Dunford alors $\chi_A = \chi_D$ avec D dz et donc χ_D scindé, donc χ_A est scindé : contradiction.
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Son polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc elle n'admet pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.

Q 3) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculons son polynôme caractéristique, en développant par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{aligned}\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -8 \\ -3 & X+1 & -6 \\ 2 & 0 & X+5 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)\begin{vmatrix} X-3 & -8 \\ 2 & X+5 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)^3.\end{aligned}$$

Ainsi χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de l'énoncé, A admet une décomposition de Dunford. Soit (D, N) le couple de sa décomposition de Dunford. D est diagonalisable et

$\chi_D(X) = \chi_A(X) = (X+1)^3$ donc $\mathrm{Sp}(D) = \{-1\}$. La matrice D est semblable à la matrice diagonale avec des -1 sur sa diagonale, donc D est semblable à $-I_3$. Ainsi $\exists P \in GL_3(\mathbb{R}), P^{-1}DP = -I_3$, d'où $D = P(-I_3)P^{-1} = -I_3$. On a $D = -I_3$, d'où

$$N = A - D = A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

On vérifie que (D, N) est la décomposition de Dunford de A (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) : - (1) $A = D + N$. - (2) $D = -I_3$ est diagonale donc diagonalisable. - (3) Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0 = (A + I_3)^3 = N^3$ donc N est bien nilpotente. ' '**Remarque :** on peut aussi calculer :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 0$$

Donc N est nilpotente d'indice 2, on s'en servira Q4.

- (4) $D = -I_3$ est scalaire donc commute avec $N : DN = ND = -N$.

Ainsi $\left(\left(D = -I_3, N = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right)\right)$ est la décomposition de Dunford de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Q 4) On a montré que $A = D + N$ où (D, N) est la décomposition de Dunford de A.

- Puisque D et N commutent, $\exp(A) = \exp(D + N) = \exp(D)\exp(N)$.

$D = -I_3$ donc $\forall k \in \mathbb{N}, D^k = (-1)^k I_3$. On reconnaît le développement en série entière de exp en -1 :

$$\exp(D) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right) I_3 = e^{-1} I_3$$

- Puisque N est nilpotente d'indice 2 , on a $\forall k \geq 2, N^k = 0$ et $\exp(N)$ est une somme finie :

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} N^k = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} N^k = I_n + N = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- On conclut que

$$\exp(A) = \exp(D)\exp(N) = e^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Q 5) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.

Posons $P(X) = X(X-1)$ Alors $P(A^2) = A^2(A^2 - I_n) = A^2(A - I_n)(A + I_n) = 0(A + I_n) = 0$.

Donc le polynôme $X(X-1)$ annule la matrice A^2.

Le polynôme $X(X-1)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$ et annule A^2, donc A^2 est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$. Posons $D = A^2$ et $N = A - A^2$. Vérifions que (D, N) est la décomposition de Dunford de A :

- (1) $A = D + N$ par construction.
- (2) $D = A^2$ est diagonalisable.
- (3) $N^2 = (A - A^2)^2 = A^2(I_n - A)^2 = A^2(A - I_n)(A - I_n) = 0$ car $A^2(A - I_n) = 0$.

$$N^2 = 0 \text{ donc } N \text{ est nilpotente.}$$

- (4) D et N sont des polynômes en A donc commutent : $DN = ND = A^3 - A^4$.

Donc $(D = A^2, N = A - A^2)$ est la décomposition de Dunford de la matrice A.

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Q 6) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculons son polynôme caractéristique.

On effectue $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$.

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ -2 & X & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & X-1 & -1 \\ -1 & X-1 & X-2 \end{vmatrix} \\
&= (X-1) \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} \\
&= (X-1)((X-3)(X-1)+1) \\
&= (X-1)\left(X^2-4X+4\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$. Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$. On a $\dim(\ker(A - I_3)) = 1$. Calculons $\dim(\ker(A - 2I_3))$.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $(A - 3I_3)$ est de rang 2. Par le théorème du rang, $\dim(\ker(A - 3I_3)) = 1 < 2$ donc A n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Par le théorème de Cayley-Hamilton, χ_u annule u, or $\chi_u(X) = (X-1)(X-2)^2$. Les polynômes $(X-1)$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux.

Par le théorème de décomposition des noyaux, $\mathbb{R}^3 = \ker(\chi_u(u)) = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{id})^2$.

Q 7) Calculons les noyaux des endomorphismes demandés (dont on sait déjà la dimension) :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \ker(A - I_3) = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \ker(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \ker(A - 2I_3)^2 = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Posons alors

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

P est la matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique. Comme $\ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\,\mathrm{id})^2 = \mathbb{R}^3$ Cette famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ est alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (e_1, e_2, e_3).

Par construction, on a $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = 2e_2$. De plus

$$u(e_3) = Ae_3 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_2 + 2e_3$$

Ecrivons la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$B = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Q 8) (i) Montrons que :

$$\left(D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est la décomposition de Dunford de } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En effet : $B = D_1 + N_1$; D_1 est diagonale donc diagonalisable ; $N_1^2 = 0$ donc N_1 est nilpotente ; D_1 et N_1 commutent car $D_1 N_1 = N_1 D_1 = 2N_1$.

(ii) Puisque A et B représentent la matrice du même endomorphisme u dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B}$, on a la formule de changement de base $P^{-1}AP = B$ i.e. $A = PBP^{-1}$. De plus on obtient l'inverse de P en remarquant que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1 + e_2 + e_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 - e_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3. \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) On pose $D = PD_1P^{-1}$ et $N = PN_1P^{-1}$. Montrons que (D, N) est la décomposition de Dunford de A :

• $A = PBP^{-1} = P(D_1 + N_1)P^{-1} = PD_1P^{-1} + PN_1P^{-1} = D + N$.

• $N^2 = \left(PN_1P^{-1}\right)^2 = PN_1^2P^{-1} = 0$ donc N est nilpotente. • D et N commutent car D_1 et N_1 commutent :

$$DN = \left(PD_1P^{-1}\right)\left(PN_1P^{-1}\right) = P(D_1N_1)P^{-1} = P(N_1D_1)P^{-1} = \left(PN_1P^{-1}\right)\left(PD_1P^{-1}\right) = ND$$

Donc (D, N) est la décomposition de Dunford de A.

(iv) Calculons ces matrices :

$$D = PD_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puis :

$$N = PN_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement $\left(D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est la décomposition de Dunford de A.

Q 9) On décompose la fraction en éléments simples.

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{\lambda}{(X-2)^2} + \frac{\mu}{(X-2)}$$

En regroupant les deux derniers termes, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX + c}{(X-2)^2} = \frac{(a+b)X^2 + (c-b-4a)X + 4a - c}{(X-1)(X-2)^2}$$

Par unicité de l'écriture polynomiale :

$$\begin{cases} a + b & = 0 \\ c - b - 4a & = 0 \\ 4a - c & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = 1 \\ b & = -1 \\ c & = 3 \end{cases}$$

Donc

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{1}{X-1} + \frac{-X+3}{(X-2)^2}$$

On en déduit par multiplication par $(X-1)(X-2)^2$ que

$$1=(X-2)^2+(-X+3)(X-1).$$

Posons $U(X)=-X+3, \quad V(X)=1. \quad$ On a $\deg(U)=1<2, \deg(V)=0<1$ et

$$(X-1)U(X)+(X-2)^2V(X)=1.$$

Q 10) . - On pose $p=V(u)\circ(u-2\mathrm{id})^2$ et $q=U(u)\circ(u-\mathrm{id})$. On a obtenu à la question Q9 la relation $U(X)(X-1)+V(X)(X-2)^2=1$. On évalue cette égalité en l'endomorphisme u :

$$p+q=U(u)\circ(u-\mathrm{id})+V(u)\circ(u-2\mathrm{id})^2=1(u)=\mathrm{id}$$

Donc $p+q=\mathrm{id}$. - Posons $F=\ker(u-\mathrm{id})$ et $G=\ker(u-2\mathrm{id})^2$.
Soit $x\in F$. Alors $(u-\mathrm{id})(x)=0$, donc :

$$\begin{aligned}q(x)&=U(u)\circ(u-\mathrm{id})(x)=0\\ p(x)&=p(x)+q(x)=\mathrm{id}(x)=x\end{aligned}$$

Donc $\forall x\in F, p(x)=x, q(x)=0$. Soit $x\in G$. Alors $(u-\mathrm{id})^2(x)=0$, donc :

$$\begin{aligned}p(x)&=V(u)\circ(u-2\mathrm{id})^2(x)=0\\ q(x)&=p(x)+q(x)=\mathrm{id}(x)=x\end{aligned}$$

Donc $\forall x\in G, p(x)=0, q(x)=x$. Puisque $E=F\oplus G$, tout $x\in E$ s'écrit de manière unique $x=x_F+x_G$ avec $x_F\in F$ et $x_G\in G$. On obtient :

$$\begin{aligned}p(x)&=p(x_F)+p(x_g)=x_F+0=x_F\\ q(x)&=q(x_F)+q(x_g)=0+x_G=x_G\end{aligned}$$

On a montré que p est le projecteur sur $F=\ker(u-\mathrm{id})$ parallèlement à $G=\ker(u-2\mathrm{id})^2$ et q est le projecteur sur $G=\ker(u-2\mathrm{id})^2$ parallèlement à $F=\ker(u-\mathrm{id})$.

Q 11) On pose $d=p+2q$. On a $d(e_1)=p(e_1)+2q(e_1)=e_1, d(e_2)=2e_2$ et $d(e_3)=2e_3$, donc la matrice de d dans la base (e_1,e_2,e_3) s'écrit $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, ainsi d est diagonalisable. d est un polynôme en u car p et q le sont. Posons $n=u-d$, la matrice de n dans la base (e_1,e_2,e_3) s'écrit $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, donc n est nilpotente, d et n commutent car ce sont des polynômes de u.
En fait, on vient de réaliser la décomposition de Dunford au niveau des endomorphismes.
Si on note N et D les matrices, respectivement, de n et u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. De ce qui précède (D,N) est la décomposition de Dunford de la matrice A. On a $d=p+2q=id+q$ donc

$$\begin{aligned}d&=id+U(u)\circ(u-\mathrm{id})\\ &=id+(u-3\mathrm{id})\circ(u-\mathrm{id})\\ &=u^2-4u+4\mathrm{id}\end{aligned}$$

et $n=u-d=-u^2+5u-4\mathrm{id}$, ce qui donne

$$D=A^2-4A+4I_3 \text{ et } N=-A^2+5A-4I_3$$

Partie III - Une preuve de l'existence de la décomposition

Q 12) Soit E un K-e.v. et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé : $\chi_u = \prod_{i=1} p(X - \lambda_i)^{m_i}$ (hyp. toujours vérifiée si $K = \mathbb{C}$).

Alors le théorème de Cayley-Hamilton donne $\chi_u(u) = 0$ et donc par Théorème de Décomposition des noyaux (T.D.N) :

$$\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(u - \lambda_i \operatorname{id})^{m_i}}$$

Q 13) Le résultat admis par l'énoncé fait en réalité partie du T.D.N. Pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$, on note $C_i \coloneqq \ker(u - \lambda_i \operatorname{id})^{m_i}$ appelée s.e.v. caractéristique pour la v.p. λ_i.

Notons u_i l'endomorphisme induit par u sur le s.e.v. caractéristique C_i. En notant $v_i = u_i - \lambda_i \operatorname{id}_{C_i}$ on sait que v_i est nilpotent d'indice $\leq m_i$.

A partir de cette écriture $u_i = \lambda_i \operatorname{id}_{C_i} + v_i$ et des projecteurs π_i, on peut écrire :

$$u = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i \operatorname{id}_{C_i} + v_i) \circ \pi_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \pi_i + \sum_{i=1}^{p} v_i \circ \pi_i$$

On pose alors $d = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \pi_i \in \mathbb{K}[u]$ et $v = \sum_{i=1}^{p} v_i \circ \pi_i = \sum_{i=1}^{p} (u - \lambda_i \operatorname{id}) \circ \pi_i \in \mathbb{K}[u]$.

On a bien d dz, v nilpotent et $d \circ v = v \circ d$ puisqu'ils sont dans $\mathbb{K}[u]$.

Enfin on a bien $\chi_u = \chi_d$ puisque dans une base adaptée à $(*)$ d est représenté par une matrice diagonale et donc $\chi_d = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{m_i}$.

Partie IV - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q 14) (i) D'après le cours lorsque deux endomorphismes commutent, le noyau de l'un est stable par l'autre.

Ici v commute avec u donc avec $u - \lambda_i \mathrm{id}$, on en déduit que $E_{\lambda_i}(u) = \ker(u - \lambda_i \mathrm{id})$ est stable par v.

(ii) Soit $v_i = v_{|E_{\lambda_i}(u)}$. Comme v est diagonalisable, donc le polynôme minimal π_v est scindé a racines simples, π_v annule v_i par suite v_i est diagonalisable, soit B_i une base de $E_{\lambda_i}(u)$ formée de vecteurs propres de v_i, qui sont aussi et des vecteurs propres de v. Or u est diagonalisable alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$, donc $(B_1, \dots, B_p)$ est une base de E,formée de vecteurs qui sont propres à la fois a u et a v, c'est une base commune de diagonalisation pour u et v.

Q 15) Soient u et v les endomorphismes canoniquement associés, respectivement, à A et B, donc ils sont diagonalisables et commutent, il existe donc une base commune de diagonalisation pour u et v. Dans cette base la matrice de $u - v$ est diagonale comme différence de deux matrices diagonales. Ce qui montre que la matrice $A - B$ est diagonalisable.

Q 16) Si A et B sont deux matrices nilpotentes d'indice de nilpotence, respectivement, p et q. A et B commutent donc,

$$(A - B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k (-B)^{p+q-k}$$

remarquons que si $k \geq p$ alors $A^k = 0_n$ et $k < p$ alors $p + q - k > q$ et $B^{p+q-k} = 0_n$, ainsi $(A - B)^{p+q} = 0_n$, $A - B$ est donc nilpotente.

Q 17) Soit (D, N) et (D', N') vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tels que D, N, D' et N soient des polynômes en A. On a : $D + N = D + N'$ donc $D - D' = N' - N$. Or D commute avec D' et N commute avec N', car elles sont des polynômes en A, donc $D - D'$ est diagonalisable et $N' - N$ est nilpotente. Or la seule matrice à la fois dz et nilpotente est la matrice nulle donc ici comme $D - D' = N' - N$, on a $D - D' = N' - N = 0$ ce qui donne $D = D'$ et $N' = N$, d'où l'unicité de (D, N).

Partie IV - Non continuité de l'application $A \mapsto D$

Q 18) (i) Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$. On considère les matrices suivantes A et B de $M_n(\mathbb{C})$:

$$A = \mathrm{Diag}(1, 0, \dots, 0), \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad C = A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A est diagonale donc diagonalisable.

On a $\chi_B(X) = (X+1)X^{n-1}, \mathrm{Sp}(B) = \{0, -1\}, \dim(\ker(B + I_n)) = 1$. Puisque B est de rang 1 , on a $\dim(\ker(B)) = n-1$ par le théorème du rang, donc $\dim(\ker(B + I_n)) + \dim(\ker(B)) = (n-1) + 1 = n$ donc B est diagonalisable.

La matrice C est T.S.S. donc nilpotente non nulle, donc non diagonalisable.

Finalement, A et B sont dans $\mathcal{D}$ mais $C = A+B \notin \mathcal{D}$. Donc $\mathcal{D}$ n'est pas stable par combinaison linéaire et $\mathcal{D}$ n'est pas un espace vectoriel.

(ii) Par théorème sur les produits de limites dans une algèbre bornée si $M_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} M$, on a $PM_kP^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} PMP^{-1}$.

Par caractérisation séquentielle de la continuité, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est donc bien continue sur $M_n(\mathbb{K})$.

Q 19) Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ donc A admet une unique décomposition de Dunford (D, N). On note $\varphi : \begin{matrix} M_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{D} \\ A \mapsto D \end{matrix}$. D'après la question Q2, la décomposition de Dunford de A diagonalisable est $(D, N) = (A, 0)$. Donc $\forall A \in \mathcal{D}, \varphi(A) = A$ i.e. φ est l'application identité sur $\mathcal{D}$. Supposons par l'absurde que φ soit continue sur $M_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Comme $\mathcal{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$, donc il existe une suite $(B_k)_{k\geq 0}$ de matrices diagonalisables qui converge vers A. Puisque $B_k \in \mathcal{D}$, on a $\varphi(B_k) = B_k$. Par continuité de φ :

$$\varphi(A) = \lim_{k\to+\infty} \varphi(B_k) = \lim_{k\to+\infty} B_k = A$$

donc $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \varphi(A) = A$ et φ est l'application identité sur $M_n(\mathbb{C})$. Montrons que ceci est absurde. Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente non nulle. Par exemple, la matrice suivante est nilpotente (car $\chi_N(X) = X^n$) et non nulle :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

D'après la question Q2, $\varphi(N) = 0 \neq N$. Donc φ ne peut pas être l'application identité sur $M_n(\mathbb{C})$. On a montré que φ n'est pas continue sur $M_n(\mathbb{C})$.