DM 6 : normes N_p et isométries pour ces normes, solutions

Partie I. : on montre que les N_p sont des normes grâce à une généralisation de l'ICS

1. La généralisation de l'Inégalité de Cauchy-Schwarz

a) L'inégalité demandée est évidente si u ou v est nul. Sinon, compte tenu de $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, la concavité de ln, donne l'inégalité suivante :

$$\ln\Big(\frac{|u|^p}{p}+\frac{|v|^q}{q}\Big) \geq \frac{1}{p}\ln\big(|u|^p\big)+\frac{1}{q}\ln\big(|v|^q\big) = \ln|u|+\ln|v| = \ln|uv|.$$

Par injectivité du ln, on conclut bien que $\frac{|u|^p}{p}+\frac{|v|^q}{q} \geq |uv|$.

b) Soit x et y dans $(\mathbb{R}^n)$ tels que $N_p(x)=N_q(y)=1$. Alors

$$\begin{aligned}
|(x|y)| = \Big|\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \quad \text{par I.T.}\\
&\leq \sum_{i=1}^n \Big(\frac{|x_i|^p}{p}+\frac{|y_i|^q}{q}\Big) \quad \text{par a)}\\
&= \frac{1}{p}\big(N_p(x)\big)^p + \frac{1}{q}\big(N_q(y)\big)^q = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

c) L'inégalité demandée est évidente si x ou y est nul. Sinon, on applique le b) aux vecteurs $\frac{x}{N_p(x)}$ et $\frac{y}{N_q(y)}$, qui donne :

$$\Big(\frac{x}{N_p(x)}\Big|\frac{y}{N_q(y)}\Big) \leq 1,$$

et par bilinéarité du p.s. on en déduit bien l'inégalité demandée :

Inégalité de Hölder : pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2$, $|(x|y)| \leq N_p(x)N_q(y)$.
Noter que pour $p=q=2$, on retrouve l'inégalité Cauchy-Schwarz

2. Application à l'inégalité triangulaire pour N_p :

a) $\big(N_p(x+y)\big)^p = \sum_{i=1}^n (|x_i+y_i|)^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i| z_i \leq \sum_{i=1}^n |x_i| z_i + \sum_{i=1}^n |y_i| z_i$.

En posant $x' = \big(|x_1|,\dots,|x_n|\big)$ et $y'=\big(|y_1|,\dots,|y_n|\big)$, cela se réécrit $\big(N_p(x+y)\big)^p \leq (x'|z)+(y'|z)$.
L'inégalité de Hölder donne alors :

$$\big(N_p(x+y)\big)^p \leq N_p(x')N_q(z)+N_p(y')N_q(z) = \big(N_p(x)+N_p(y)\big)N_q(z).$$

b) $N_q(z) = \Big(\sum_{i=1}^n z_i^q\Big)^{1/q} = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\Big)^{1-1/p} = \Big(N_p(x+y)\Big)^{p-1}$.

L'inégalité du a) se réécrit donc $\big(N_p(x+y)\big)^p \leq \big(N_p(x)+N_p(y)\big)\big(N_p(x+y)\big)^{p-1}$.
Si $x+y\neq 0$, la simplification donne

$$\boxed{N_p(x+y) \leq N_p(x)+N_p(y),}$$

et l'inégalité est encore vraie si $x+y=0$ puisque le premier membre est nul.

3. Conclusion Il est immédiat que $N_p(x)=0$ implique $x=0$ et que $N_p(\lambda x)=|\lambda|N_p(x)$ pour tout $(\lambda,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

De plus, on a montré au 2. que N_p vérifie l'inégalité triangulaire. N_p est donc bien une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Commentaire : Ainsi vous disposez de deux preuves de l'inégalité triangulaire pour les normes N_p, celle-ci qui repose sur l'inégalité de Hölder et celle de la planche qui repose sur la convexité des boules.

Partie II. Comparaison des normes N_p

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Alors $N_\infty(x) = |x_{i_0}|$ pour un certain $i_0 \in [\![1, n]\!]$.

Donc pour chaque $p \geq 1$, $N_\infty(x)^p = |x_{i_0}|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$ puisqu'on rajoute à $|x_{i_0}|^p$ des termes positifs.

En prenant la racine p-ième des deux membres, on obtient :

$$N_\infty(x) \leq N_p(x) \quad (1)$$

D'autre part, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, $|x_i| \leq N_\infty(x)$ donc $|x_i|^p \leq N_\infty(x)^p$ et en ajoutant ces inégalités :

$$\sum_{i=1}^{p} |x_i|^p \leq n N_\infty(x)^p,$$

puis en prenant la racine p-ième des deux membres

$$N_p(x) \leq n^{1/p}\ N_\infty(x) \quad (2)$$

Avec (1) et (2), on a l'encadrement ;

$$\boxed{N_\infty(x) \leq N_p(x) \leq n^{1/p} N_\infty(x).}$$

Pour montrer que les constantes $\alpha = 1$ et $\beta = n^{1/p}$ sont les meilleures possibles, il suffit de trouver des valeurs *non nulles* de x telles que chacune des inégalités (1) et (2) soit une égalité.

Or (1) est une égalité lorsque $x = (1, 0, \ldots, 0)$ et (2) lorsque $x = (1, 1, \ldots, 1)$.

b) L'encadrement du a) et le fait que $n^{1/p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donne par théorème des gendarmes :

$$\boxed{N_p(x) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} N_\infty(x).}$$

2. a) Chapitre T3 : $\mathbb{R}^n$ étant de dimension finie, la sphère unité S_p est compacte et, par équivalence des termes, la norme $N_{p'}$ est continue pour la topologie définie par N_p. L'existence du minimum $m_{p,p'}$ et du maximum $M_{p,p'}$ en résulte par théorème sur les fonctions continues sur un compact.

b) x appartient à S_p, donc par 1) a), $N_\infty(x) \leq 1$ donc $|x_i| \leq 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Comme $p' > p$, on en déduit $|x_i|^{p'} \leq |x_i|^p$, puis :

$$N_{p'}(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p'}\Big)^{1/p'} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p}\Big)^{1/p'} = 1 \quad \text{(puisque } x \in S_p\text{)}.$$

Cela montre que $M_{p,p'} \leq 1$, mais pour $x_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in S_p$, on a $N_{p'}(x_1) = 1$. Finalement :

$$\boxed{M_{p,p'} = 1.}$$

c) Posons $\alpha = p'/p$ et $f : t \mapsto t^\alpha$.

Alors pour tout $t > 0$, $f''(t) = \alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2}$. Donc pour tout $\alpha > 1$, la fonction f est *convexe* sur $\mathbb{R}^+$ (aussi en 0 par continuité)

Par l'inégalité de Jensen :

$$\boxed{f\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\big(|x_i|^p\big).}$$

d) Soit $x \in S_p$ alors $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = 1$, L'inégalité du c) devient donc :

$$\frac{1}{n^{p'/p}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p'} = \frac{1}{n}\Big(N_{p'}(x)\Big)^{p'}.$$

On obtient ainsi $\big(N_{p'}(x)\big)^{p'} \geq \dfrac{1}{n^{p'/p - 1}}$, puis :

$$\boxed{N_{p'}(x) \geq \frac{1}{n^{1/p-1/p'}}}$$

Par ailleurs, cette inégalité est une égalité lorsque x est le vecteur de S_p tel que $x_i = \dfrac{1}{n^{1/p}}$ pour tout i. On conclut finalement que $\boxed{m_{p,p'} = \dfrac{1}{n^{1/p-1/p'}}}$

3. On sait par 2.b) que pour $p' > p$ et pour $x \in S_p$, $N_{p'}(x) \leq 1$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, alors $x/N_p(x) \in S_p$ et donc par ce qui précède $N_{p'}(x/N_p(x)) \leq 1$. Par homogénéité de $N_{p'}$, on en déduit que ;

$$\boxed{\forall\, p' \geq p,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ N_{p'}(x) \leq N_p(x) \quad (1)}$$

Pour répondre à la question posée :

$$\boxed{\text{La fonction } p \mapsto N_p(x) \text{ est donc décroissante sur }]1, +\infty[.}$$

Remarque : Avec la même méthode que pour (1), on peut déduire de ce qui précède une inégalité en sens inverse entre N_p et $N_{p'}$ et les constantes α et β optimales telles que

$$\alpha N_{p'} \leq N_p \leq \beta N_{p'}.$$

Combien ces constantes valent-elles ?

Partie III. Isométries de $(\mathbb{R}^n, N_p)$

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. D'après l'inégalité de Hölder, pour tout $y \in S_p$, $\left|(x|y)\right| = \left|(y|x)\right| \leq N_p(y).N_q(x) = N_q(x)$.

Donc l'ensemble des $|(x|y)|$ pour $y \in S_p$ est majoré par $N_q(x)$ indépendant de y, donc admet un sup. $K_p(x)$ et $\boxed{K_p(x) \leq N_q(x)}$ par définition de la borne supérieure.

b) Par déf de y, $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^q$ donc $\boxed{(x|y) = \big(N_q(x)\big)^q}$.

De même $N_p(y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\Big)^{1/p} = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p(q-1)}\Big)^{1/p} = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q\Big)^{1/p} = \big(N_q(x)\big)^{q/p}$

Donc $\boxed{N_p(y) = \big(N_q(x)\big)^{q-1}.}$

c) Si $x = 0$ le résultat est évident.

Si $x \neq 0$, y est aussi non nul et le vecteur de S_p défini par $y' = \dfrac{y}{N_p(y)}$ vérifie par le b) :

$$(x|y') = \frac{(x|y)}{N_p(y)} = \frac{\big(N_q(x)\big)^q}{\big(N_q(x)\big)^{q-1}} = N_q(x).$$

Cela montre que $K_p(x) \geq N_q(x)$ et, compte tenu du 1.a), que $\boxed{K_p(x) = N_q(x)}$.

2.

(i) Montrons que $U_p \subset GL(\mathbb{R}^n$:

Soit $u \in U_p$. Si $x \in \ker u$, $N_p\big(u(x)\big) = 0$, donc $N_p(x) = 0$, puis $x = 0$; u est donc injectif, et aussi bijectif puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie. Ainsi, U_p est inclus dans $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Visiblement $u = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ est dans U_p

(iii) si u, v sont dans U_p alors pour tout $x \in E$, $N_p((u(v(x)) = N_p(v(x)) = N_p(x)$ la première égalité venant de $u \in U$, la seconde de $v \in U$.

Ainsi on a bien montré que $u \circ v \in U_p$.

(iv) Soit $u \in U_p$ et $x \in E$. Comme $u \in U_p$, avec $y = u^{-1}(x)$ on a $N_p(u(y)) = N_p(y)$ donc $N_p(x) = N_p(u^{-1}(x))$. Ainsi $u^{-1} \in U_p$.

Avec (i), (ii), (iii), (iv) on a bien montré que U_p est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

3. a) Soit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in \mathbb{R}^n$. Par linéarité de $s_{\sigma,\varepsilon}$ et bijectivité de σ,

$$s_{\sigma,\varepsilon}(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varepsilon_j e_{\sigma(j)} = \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma^{-1}(i)} \varepsilon_{\sigma^{-1}(i)} e_i.$$

Donc $N_p\big(s_{\sigma,\varepsilon}(x)\big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_{\sigma^{-1}(i)}|^p\Big)^{1/p} = \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\Big)^{1/p} = N_p(x)$, ce que l'on voulait.

b) (i) Déjà $\mathrm{id} \in \mathcal{S}$.

(ii) Montrons que $\mathcal{S}$ est stable par $\circ$.

Soit σ et σ' dans S_n et ε et ε' dans $\{-1,1\}^n$. Alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:

$$(s_{\sigma',\varepsilon'} \circ s_{\sigma,\varepsilon})(e_j) = s_{\sigma',\varepsilon'}\big(\varepsilon_j e_{\sigma(j)}\big) = \varepsilon_j \varepsilon'_{\sigma(j)} e_{(\sigma' \circ \sigma)(j)},$$

donc

$$\boxed{s_{\sigma',\varepsilon'} \circ s_{\sigma,\varepsilon} = s_{\sigma'\circ\sigma,\varepsilon''}, \text{ où pour tout } j \in [\![1,n]\!] : \varepsilon''_j = \varepsilon_j \varepsilon'_{\sigma(j)}}$$

.

(iii) Montrons que $\mathcal{S}$ est stable par passage aux inverses. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:

$$(s_{\sigma,\varepsilon})^{-1}(e_j) = \varepsilon_{\sigma^{-1}(j)} e_{\sigma^{-1}(j)},$$

donc $(s_{\sigma,\varepsilon})^{-1} = s_{\sigma^{-1},\varepsilon'}$, où pour tout $j \in [\![1,n]\!]$: $\varepsilon'_j = \varepsilon_{\sigma^{-1}(j)}$.

Ainsi, avec (i), (ii), (iii), on a montré que $\mathcal{S}$ est non vide, stable par composition et passage à la réciproque ; avec le a), $\mathcal{S} \subset U_p$ donc

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ un sous-groupe de } U_p}$$

.

(iv) Pour le cardinal : on remarque (avec chaque égalité pour $j = 1, \ldots, n$) que $s_{\sigma,\varepsilon} = s_{\sigma',\varepsilon'}$ implique $\sigma = \sigma'$ et $\varepsilon = \varepsilon'$.

Ainsi l'application $(\sigma,\varepsilon) \mapsto s_{\sigma,\varepsilon}$ est donc une bijection de $S_n \times \{1,-1\}^n$ sur $\mathcal{S}$. Par conséquent,

$$\boxed{\mathrm{Card}\, \mathcal{S} = \mathrm{Card}\big(S_n \times \{1,-1\}^n\big) = \mathrm{Card}(S_n)\,\mathrm{Card}\big(\{1,-1\}^n\big) = n!\, 2^n.}$$

Remarque : ce groupe s'appelle parfois le *groupe des permutations généralisées*

4. a) Par définition de l'écriture matricielle, pour chaque j : $\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^p = \big(N_p(u(e_j))\big)^p$ (1)

Comme $u \in U_p$, on sait que $\big(N_p(u(e_j))\big)^p = \big(N_p(e_j)\big)^p$ (2)

Enfin $N_p(e_j) = 1$ donc avec (1) et (2) on a pour chaque $j \in [\![1,n]\!]$, $\boxed{\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^p = 1}$.

Par sommation sur j, on obtient : $\boxed{\sum_{1 \le i,j \le n} |a_{i,j}|^p = n}$.

b) Soient X et Y les matrices-colonne associées dans $\mathcal{B}$ à x et y. AX et ${}^tAY$ sont alors associées respectivement à $u(x)$ et à $u^*(y)$, par conséquent : $\big(u(x)|y\big) = {}^t(AX)Y = {}^tX({}^tAY) = \big(x|u^*(y)\big)$.

Culturel : l'endomorphisme u^* s'appelle endomorphisme *adjoint* de u.

c) Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Il s'agit de prouver que $N_q\big(u^*(y)\big) = N_q(y)$.

Selon 1.c), $N_q\big(u^*(y)\big) = K_p\big(u^*(y)\big) = \sup_{x \in S_p} \big|\big(x|u^*(y)\big)\big| = \sup_{x \in S_p} \big|\big(u(x)|y\big)\big|$.

Mais comme u appartient à U_p, $u(x)$ décrit S_p quand x décrit S_p ; par conséquent :

$$N_q\big(u^*(y)\big) = \sup_{x \in S_p} |(x|y)| = N_q(y)$$

Donc on a bien $\boxed{u^* \in U_p}$.

On peut donc appliquer le a) en remplaçant A par ${}^tA$ et p par q, ce qui donne :

$$\boxed{\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^q = \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{j,i}|^q = n}$$

d) D'après a) et c), $\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} \left(|a_{i,j}|^p - |a_{i,j}|^q\right) = 0$. La première des deux égalités du a) montre que les $|a_{i,j}|$ sont tous dans $[0,1]$, donc les $|a_{i,j}|^p - |a_{i,j}|^q$ ont tous le même signe ; comme leur somme est nulle, ils sont tous nuls.

Ainsi, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|a_{i,j}|^p = |a_{i,j}|^q$. Comme $p \neq q$ (puisque $p \neq 2$), cela implique que $|a_{i,j}| \in \{0,1\}$.

e) On déduit de a) et d) que A possède exactement un coefficient non nul dans chaque colonne, et qu'il vaut 1 ou −1. Notons $\sigma(j)$ l'indice de ligne du coefficient non nul situé sur la colonne j de A et $\varepsilon_j = a_{\sigma(j),j}$. Comme A est inversible (puisque u est bijective), elle n'a aucune ligne nulle ; l'application σ de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même définie plus haut est donc surjective, et aussi bijective car $[\![1,n]\!]$ est un ensemble fini. Autrement dit, $s \in S_n$.

Finalement, d'après la matrice A, $u(e_j) = \varepsilon_j e_{\sigma(j)}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, donc $u = s_{\sigma,\varepsilon} \in \mathcal{S}$.

5. On conclut de 3.a) et 4.e) que pour $\boxed{p \neq 2,\ U_p = \mathcal{S}.}$

Autrement dit, pour $p \neq 2$, il y a très peu d'isométries : cela vient de la forme *plus irrégulière* des sphères par rapport au cas euclidien où tous les points des sphères se ressemblent.

Dans le cas $p = 1$, le résultat est vrai aussi, même s'il faut changer la preuve précédente pour $n = 2$ ou $n = 3$, on voit bien la sphère pour N_1 et ses points extrémaux et on sent bien que les isométries vont devoir échanger ces points extrémaux.