Devoir surveillé 2 (4h)

Les calculatrices et autres appareils électroniques (téléphones etc.), l'usage de stylo à encre effaçable et des blancs de correction sont interdits. Les couleurs autorisées sont le bleu, le noir et le rouge est toléré pour les encadrés. Encadrez ou soulignez vos résultats, séparez clairement vos questions, la clarté de votre présentation est un élément important d'appréciation.

Notations

Pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ le spectre complexe de A et, si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on note $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre des vecteurs $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui vérifient $AX = \lambda X$.

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$ lorsque elle vérifie les deux conditions :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1, \tag{1}$$

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} > 0 \tag{2}$$

Partie I : étude en dimension trois

Dans cette partie, on suppose $n = 3$. Étant donné un nombre complexe z, on note $M(z)$ le point du plan complexe d'affixe $z = x + iy$, c'est-à-dire le point de coordonnées $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

On considère le triangle du plan complexe dont les sommets sont les points $P(1), Q(j), R\left(j^2\right)$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On note T l'intérieur de ce triangle, bords non compris.

Soit D le disque ouvert du plan complexe de centre O (origine du repère) et de rayon 1, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z| < 1$.

Q 1) a) Dessiner les ensembles T et D sur un même dessin.

b) En notant x et y l'abscisse et l'ordonnée d'un point du plan complexe, déterminer des équations cartésiennes des droites $(PQ), (QR)$ et (RP).

c) En déduire qu'un point $M(x+iy)$ appartient à T si et seulement si x et y vérifient trois inégalités que l'on précisera.

Q 2) Dans cette question, on considère une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$.

a) Montrer que 1 est valeur propre de A.

Dans la suite de cette question 2, on suppose que les autres valeurs propres de A sont des nombres complexes conjugués distincts, λ et $\bar{\lambda}$, avec $0 < |\lambda| < 1$. On note $\lambda = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

b) Justifier que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$.

c) Exprimer $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}\left(A^2\right)$ en fonction de λ et $\bar{\lambda}$, puis en fonction de a et b.

d) Montrer les inégalités $\mathrm{tr}(A) > 0$ et $\mathrm{tr}\left(A^2\right) > a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2$.

e) En déduire l'inégalité $(\mathrm{tr}(A))^2 < 3\,\mathrm{tr}\left(A^2\right)$

f) En déduire les inégalités :

$$2a + 1 > 0 \quad \text{et} \quad (a - \sqrt{3}b - 1)(a + \sqrt{3}b - 1) > 0.$$

g) Déduire des questions précédentes que le point $M(\lambda)$ appartient à T (on pourra considérer les régions de D délimitées par les côtés du triangle PQR).

Q 3) Dans cette question, on note $\lambda = re^{i\theta}$ avec $0 < r < 1$ et $0 < \theta < \pi$ et on suppose que le point $M(\lambda)$ appartient à T. On note $\alpha = \frac{1+2r\cos(\theta)}{3}, \beta = \frac{1+2r\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}{3}, \gamma = \frac{1-2r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}{3}$.

a) Montrer les égalités : $\alpha = \frac{1+\lambda+\bar{\lambda}}{3}, \beta = \frac{1+j\lambda+j^2\bar{\lambda}}{3}, \gamma = \frac{1+j^2\lambda+j\bar{\lambda}}{3}$.

Dans la suite de cette question 3, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$.

b) Montrer que la matrice A vérifie la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$.

c) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer un polynôme annulateur de J.

En déduire les valeurs propres, réelles ou complexes, de la matrice J.

d) Expliciter un polynôme P tel que $A = P(J)$. En déduire que $1, \lambda$ et $\bar{\lambda}$ sont les valeurs propres de A.

Partie II : étude en dimension n quelconque

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$.

Q 4) Une valeur propre qu'on a toujours : Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1. Calculer AU, en déduire que 1 est valeur propre de A.

Q 5) Localisation des autres valeurs propres :

a) Soient une matrice $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\det(B) = 0$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X \neq 0$, tel que $BX = 0$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_k| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$. Justifier l'inégalité :

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}|$$

b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. En appliquant le a) à la matrice $B = A - \lambda I_n$, montrer que $|a_{k,k} - \lambda| \leq 1 - a_{k,k}$, où k est l'entier défini au a). En déduire $|\lambda| \leq 1$.

c) On suppose que $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ vérifie $|\lambda| = 1$ et on note $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Déduire de l'inégalité $\left|a_{k,k} - e^{i\theta}\right| \leq 1 - a_{k,k}$ du b) que $\cos(\theta) = 1$, puis en déduire λ.

Q 6) Etude des sous-espaces propres $E_1(A)$ et $E_1(A^\top)$:

a) Montrer que A et $A^\top$ ont les mêmes valeurs propres et que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A^\top)$, $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(A^\top)$.

b) Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), V \neq 0$, tel que $A^\top V = V$. Montrer que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad |v_i| \leq \sum_{j \in [\![1,n]\!]} a_{j,i} |v_j| .$$

En calculant $\sum_{i \in [\![1,n]\!]} |v_i|$, montrer que toutes ces inégalités sont en fait des égalités.

On note $|V| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}$ le vecteur dont les coefficients sont les modules des coefficients de V.

c) Montrer que $A^\top |V| = |V|$, puis que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $|v_i| > 0$.

d) Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui appartiennent à $E_1(A^\top)$.

En considérant la matrice $X - \frac{x_1}{y_1} Y$, déterminer la dimension de $E_1(A^\top)$.

e) Justifier qu'il existe un vecteur unique $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ qui engendre $E_1\left(A^\top\right)$, tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on ait $\omega_i > 0$ et $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$.

f) Déterminer une base de $E_1(A)$.

Q 7) Une autre façon de voir que toutes les valeurs propres de A sont dans le disque unité : À l'aide de la matrice colonne $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$, définie à la question 6e), on considère l'application $N : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), N(X) = \sum_{i \in [\![1,n]\!]} \omega_i \left|x_i\right|$$

a) Il est facile de vérifier que N est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ c'est-à-dire que :
(i) $\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $N(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$,
(ii) $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$, $N(\lambda X) = |\lambda|.N(X)$.
(iii) $\forall\ X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $N(X+Y) \leq N(X) + N(Y)$.
Ici démontrer seulement la propriété (ii)

b) Retrouver alors le résultat du 5b : tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ vérifie $|\lambda| \leq 1$.

Q 8) Etude de la multiplicité algébrique de la valeur propre 1 de A :

À l'aide de la matrice colonne $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$, définie à la question 6e), on considère la forme linéaire $\Phi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \Phi(X) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i$

a) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a $\Phi(AX) = \Phi(X)$.

b) Justifier que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \mathrm{Ker}(\Phi)$.

c) Soit $X \in E_\lambda(A)$ avec $\lambda \neq 1$. Montrer que $X \in \mathrm{Ker}(\Phi)$.

d) En utilisant les résultats précédents, déterminer la multiplicité de la valeur propre 1 comme racine du polynôme caractéristique χ_A.