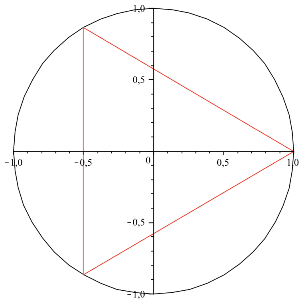
$\boxed{\text{DS 2 d'après CCINP PSI 2012 : solution}}$

Terminologie : les matrices vérifiant la condition (1) sont appelées *matrices stochastiques*. Elles sont importante pour l'étude de processus probabilistes simples. Celles vérifiant (1) et (2) sont les matrices *stochastiques positives*.



1) a) Le dessin :

   b) On a $P = (1,0), Q = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ et $R = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$. On en déduit que

$$(PQ) : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$$
$$(PR) : y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$$
$$(QR) : x = -1/2$$

   sont les équations des droites $(PQ), (PR)$ et (QR).

   c) Une droite d'équation $ax+by+c = 0$ découpe le plan en deux parties : l'une où $ax+by+c > 0$ et l'autre où $ax+by+c < 0$. En testant en l'origine, on sait quelle partie correspond à quel signe. On trouve alors immédiatement que $M(x+iy) \in T$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

$$2x+1 > 0, x - \sqrt{3}y - 1 < 0, x + \sqrt{3}y - 1 < 0$$

2) a) On peut au choix :

   - vérifier que $\det(A-I) = 0$ car $\det(A-I) = \begin{vmatrix} a_{1,1}-1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-1 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2}-1 & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3}-1 \end{vmatrix}$ via $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ puisque la somme des entrées de chaque ligne de A fait 1.
   - vérifier que le vecteur $(1\ 1\ 1)^\top$ est propre pour la v.p. 1, ce que l'énoncé fera faire dans le cas général dans la partie II.

   b) Avec l'hypothèse faite sur A les trois valeurs propres $1, \lambda, \overline{\lambda}$ sont distinctes donc la matrice A de taille 3 est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$.

   c) Avec le b), on écrit $A = P \operatorname{diag}(1, \lambda, \overline{\lambda})P^{-1}$ où $P \in GL_3(\mathbb{C})$ et donc

$$\boxed{\operatorname{Tr}(A) = 1 + \lambda + \overline{\lambda} = 1 + 2a.}$$

   En outre alors $A^2 = P \operatorname{diag}(1, \lambda, \overline{\lambda})^2 P^{-1} = P \operatorname{diag}(1, \lambda^2, \overline{\lambda^2})P^{-1}$ donc

$$\boxed{\operatorname{Tr}(A^2) = 1 + \lambda^2 + \overline{\lambda^2} = 1 + 2(a^2 - b^2)}$$

   d) Par hypothèse (2) sur A toutes les entrées $(a_{i,j})$ sont strictement positives donc

$$\boxed{\operatorname{Tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} > 0.}$$

   En outre pour chaque $i \in [\![1,3]\!]$, on a $\left(A^2\right)_{i,i} = \sum_{k=1}^{3} a_{i,k}a_{k,i} > a_{i,i}^2$ puisque tous les termes de la somme sont strictement positifs. Donc

$$\boxed{\operatorname{Tr}\left(A^2\right) > a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^3.}$$

e) L'inégalité de Cauchy-Schwarz $(u \mid v)^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$ pour le p.s. canonique de $\mathbb{R}^3$ avec $v = (a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3})$ et $u = (1,1,1)$ donne :

$$(\mathrm{Tr}(A))^2 \overset{def}{=} (a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3})^2 = (u \mid v)^2 \leq 3\left(a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2\right) \overset{parc)}{<} 3\,\mathrm{Tr}\left(A^2\right)$$

f) Par c) $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2a$ et par d), $\mathrm{Tr}(A) > 0$ d'où l'inégalité :

$$\boxed{2a + 1 > 0}$$

Avec les expressions trouvées au c), l'inégalité $\mathrm{Tr}(A)^2 < 3\,\mathrm{Tr}(A^2)$ de la question précédente devient :

$$(1 + 2a)^2 < 6(a^2 - b^2) + 3$$

autrement dit on sait que :

$$2a^2 - 6b^2 - 4a + 2 > 0$$

ou encore en divisant par 2 :

$$a^2 - 2a - 3b^2 + 1 > 0 \quad (*)$$

Il se trouve que si on développe le produit $(a - \sqrt{3}b - 1)(a + \sqrt{3}b - 1)$ donné par l'énoncé, on a :

$$(a - \sqrt{3}b - 1)(a + \sqrt{3}b - 1) = a^2 - 2a - 3b^2 + 1$$

Donc avec $(*)$ on conclut bien que :

$$\boxed{(a - \sqrt{3}b - 1)(a + \sqrt{3}b - 1) > 0}$$

g) La condition $2a + 1 > 0$ indique que $M(\lambda)$ est à droite du côté (QR).

La condition $(a - \sqrt{3}b - 1)(a + \sqrt{3}b - 1) > 0$ équivaut à $\begin{cases} \text{ou bien}(a - \sqrt{3}b - 1) > 0 & \text{et } (a + \sqrt{3}b - 1) > 0 \\ \text{ou bien}(a - \sqrt{3}b - 1) < 0 & \text{et } (a + \sqrt{3}b - 1) < 0 \end{cases}$

Or, si *par l'absurde* $(a - \sqrt{3}b - 1) > 0$ et $(a + \sqrt{3}b - 1) > 0$ alors $a^2 - 3b^2 > 1 > a^2 + b^2$ ce qui donnerait $-3b^2 > b^2$ *contradiction.*

Donc on a montré que

$$2a + 1 > 0, \quad (a - \sqrt{3}b - 1) < 0 \quad \text{et } (a + \sqrt{3}b - 1) < 0$$

La question **1c)** nous permet alors d'affirmer que

$$\boxed{M(\lambda) \in T}$$

3) a) $2r\cos(\theta) = \lambda + \bar{\lambda}$ donne immédiatement

$$\alpha = \frac{1 + 2r\cos(\theta)}{3}$$

$j\lambda + j^2\bar{\lambda} = j\lambda + \overline{j\lambda} = 2\,\mathrm{Re}(j\lambda) = 2r\cos(\theta + 2\pi/3)$ et ainsi

$$\beta = \frac{1 + 2r\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)}{3}$$

Enfin, on a de même $j^2\lambda + j\bar{\lambda} = 2\,\mathrm{Re}\left(j^2\lambda\right) = 2r\cos(\theta + 4\pi/3) = -2r\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ et donc

$$\gamma = \frac{1 - 2r\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}{3}$$

b) On a immédiatement $\alpha + \beta + \gamma = 1$ car $1 + j + j^2 = 0$.
La matrice A vérifie donc la propriété (1) (matrice stochastique).
Par ailleurs, en notant encore $\lambda = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

• $\alpha = \dfrac{1+2a}{3} > 0$ par $M(\lambda) \in T$ et 1) c)

• $\beta = \dfrac{1+j\lambda+\overline{j}\overline{\lambda}}{3} = \dfrac{1+2\operatorname{Re}(j\lambda)}{3} = \dfrac{1-a-\sqrt{3}b}{3} > 0$ encore car $M(\lambda) \in T$ et 1) c).

• Enfin, $\gamma > 0$ s'obtient de même avec la troisième condition vue en 1.c) Finalement, A a bien toutes ses entrées strictement positive d'où la condition (2) des matrices $ST > 0$.

c) On calcule

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J^3 = I_3$$

Ceci montre que le polynôme $P = X^3 - 1$ est annulateur de J. Mieux comme la famille (I, J, J^2) est clairement libre (car les indices correspondant aux entrées non nulles dans ces matrices forment des ensembles disjoints), on en déduit que $X^3 - 1$ est le polynôme minimal de J.

On sait donc que les valeurs propres de J sont exactement les racines de P donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \{1, j, j^2\}$.

d) On a immédiatement

$$A = \alpha I_3 + \beta J + \gamma J^2 = P(J) \text{ avec } P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$$

Comme J est diagonalisable, il existe une matrice inversible Q telle que

$$Q^{-1}JQ = \operatorname{diag}\left(1, j, j^2\right) =: \Delta$$

Une récurrence simple indique que pour tout entier naturel p,

$$Q^{-1}J^pQ = \Delta^p.$$

On en déduit, par combinaisons linéaires, que :

$$Q^{-1}P(J)Q = P(\Delta)$$

Donc

$$Q^{-1}AQ = Q^{-1}P(J)Q = \operatorname{diag}\left(P(1), P(j), P\left(j^2\right)\right)$$

Les valeurs propres de A sont donc $P(1), P(j)$ et $P(j^2)$.

Or avec les formules du a) et $1 + j + j^2 = 0$ on a :

$$P(1) = \alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{3}(1 + \lambda + \overline{\lambda} + (1 + j\lambda + j^2\overline{\lambda}) + (1 + j^2\lambda + j\overline{\lambda})) = 1$$

puis

$$P(j) = \alpha + j\beta + j^2\gamma = \frac{1}{3}(1 + \lambda + \overline{\lambda} + j(1 + j\lambda + j^2\overline{\lambda}) + j^2(1 + j^2\lambda + j\overline{\lambda}) = \overline{\lambda}$$

et de même

$$P(j^2) = \lambda$$

On a bien montré que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1, \lambda, \overline{\lambda}\}$.

Remarque : qu'a-t-on montré dans cette partie ? A la fin du 2) que toute matrice dans $ST > 0$ ayant à part 1 deux v.p. (forcémenent conjuguées) non réelles de module strictement plus petit que 1 a ces valeurs propres non réelles dans T. En fait le fait que les valeurs propres de A différentes de 1 soient de module strictement plus petit que 1 va être prouvé pour toutes les matrices $ST > 0$ en toute dimension dans la partie 2.

La question 3) a exhibé pour chaque $\lambda \in T$ non réel, une matrice particulière dans $ST > 0$ admettant $1, \lambda, \overline{\lambda}$ comme v.p.

4) La i-ième coordonnée de AU est $\sum_{j=1}^n a_{i,j}u_j = \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ d'après (2). On en déduit que

$$AU = U$$

c'est à dire que U est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 (U étant non nul).

5) a) Comme $BX = 0$, sa k-ième coordonnée est nulle : $\sum_{j=1}^n b_{k,j}x_j = 0$ ce qui donne

$$b_{k,k}x_k = -\sum_{j\neq k} b_{k,j}x_j$$

L'inégalité triangulaire donne (avec la définition de k)

$$|b_{k,k}|\,|x_k| \leq \sum_{j\neq k} |b_{k,j}|\,|x_j| \leq |x_k| \sum_{j\neq k} |b_{k,j}|$$

Comme $|x_k| > 0$ (X n'est pas nul), on en déduit l'inégalité demandée.

b) $B = A - \lambda I_n$ est bien non inversible (puisque λ est valeur propre) et la question précédente donne (les coefficients non diagonaux de B étant ceux de A)

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j\neq k} |a_{k,j}|$$

Avec la propriété $(ST > 0)$ on a donc

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j\neq k} a_{k,j} = \left(\sum_{j=1}^n a_{k,j}\right) - a_{k,k} = 1 - a_{k,k} \quad (*)$$

Avec la seconde forme de l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$|\lambda| - a_{k,k} \leq |\lambda - a_{k,k}| \leq 1 - a_{k,k}$$

et donc :

$$|\lambda| \leq 1$$

c) D'après la question précédente, avec $\lambda = e^{i\theta}$ et en mettant les deux membre extrêmes de l'inégalité $(*)$ au carré :

$$\left|a_{k,k} - e^{i\theta}\right|^2 = (a_{k,k} - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) = 1 + a_{k,k}^2 - 2a_{k,k}\cos(\theta) \leq (1 - a_{k,k})^2 = 1 + a_{k,k}^2 - 2a_{k,k}$$

Donc en simplifiant :

$$0 \leq 2a_{k,k}(1 - \cos(\theta)) \leq 0$$

donc $\cos(\theta) = 1$ car $a_{k,k} > 0$ donc $\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et :

$$\boxed{\lambda = 1}$$

6) a) Le déterminant est invariant par transposition et donc A et $A^\top$ ont le même polynôme caractéristique donc les mêmes valeurs propres).
Le rang est aussi invariant par transposition (le rang d'une matrice est égal au rang de ses colonnes ou de ses lignes). Les images de $A - \lambda I_n$ et de $A^\top - \lambda I_n$ ont donc même dimension. Par théorème du rang, on a alors

$$\dim\left(E_\lambda(A)\right) = n - \operatorname{rg}\left(A - \lambda I_n\right) = n - \operatorname{rg}\left(A^\top - \lambda I_n\right) = \dim\left(E_\lambda\left(A^\top\right)\right)$$

b) La i-ième coordonnée de $A^\top V$ est $\sum_{j=1}^n a_{j,i}v_j$. Elle vaut aussi v_i (car $A^\top V = V$). Par inégalité triangulaire, on en déduit que

$$|v_i| = \left|\sum_{j=1}^n a_{j,i}v_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{j,i}v_j| = \sum_{j=1}^n a_{j,i}\,|v_j|$$

En sommant ces inégalités, on a donc

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |v_j| = \sum_{j=1}^{n} \left(|v_j| \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} \right)$$

Avec la propriété (1) de l'énoncé $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{j,i} = 1$, cette inégalité devient une égalité. Toutes les inégalités intermédiaires sont donc aussi des égalités (car si l'une était stricte, la somme serait stricte). On a donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |v_i| = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |v_j|$$

c) L'égalité qu'on vient de prouver dit exactement que $A^\top |V| = |V|$.
Si, par l'absurde, il existait un i tel que $|v_i| = 0$ alors on aurait $0 = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |v_j|$ ce qui donnerait la nullité pour tout j de $a_{i,j} |v_j|$ (une somme de quantité positives n'est nulle que si toutes les quantités sont nulles) et donc de tous les v_j (car tous les $a_{i,j}$ sont strictement positifs). Ceci contredit $V \neq 0$. Ainsi

$$\forall i, |v_i| > 0$$

d) Y étant un élément non nul de $E_1(A^\top)$, on sait par la question précédente que : $\forall i, y_i \neq 0$. On peut en particulier poser $Z = X - \frac{x_1}{y_1} Y$. C'est un élément de $E_1(A^\top)$, dont la première coordonnée est nulle. Avec la question précédente (en contraposant), c'est donc le vecteur nul. X est donc multiple de Y et

$$\dim E_1 \left(A^\top\right) = 1$$

e) Soit V un vecteur non nul de $E_1(A^\top)$ et $\Omega = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} |v_i|} |V|$
Par la Q6c) on sait que Ω est un élément de $E_1(A^\top)$ dont les coordonnées sont *strictement positive* et par construction la somme de ces coordonnées égale à 1 .
Ω est le seul élément ayant ces propriétés car tout autre élément de $E_1(A^\top)$ est multiple de Ω (et la somme des coordonnées est multiple dans le même rapport).

f) Par a), on sait que $\dim E_1(A) = \dim E_1(A^\top)$ et par d), $\dim E_1(A^\top) = 1$. Donc $\dim E_1(A) = 1$ et par 4), on sait que $U = (1 \ldots 1)^\top$ est dans $E_1(A)$ donc (U) est une base de $E_1(A)$.

7) a) C'est immédiat : $N(\lambda X) = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i |\lambda||x_i| = |\lambda| \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i |x_i| = |\lambda| N(X)$.

b) Si $AX = \lambda X$ alors $N(AX) = |\lambda| N(X)$ par le a).
Mais $N(AX) = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i |(AX)_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \left| \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_j|$ la dernière inégalité étant donnée par l'inégalité triangulaire et la positivité des $a_{i,j}$. Donc en permutant les sommes :

$$N(AX) \leq \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} \omega_i a_{i,j}) |x_j| \quad (*)$$

Comme par définition de Ω, $A^\top \Omega = \Omega$ donc pour tout j, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} \omega_i = \omega_j$, ce qui, dans $(*)$ donne :

$$N(AX) \leq \sum_{j=1}^{n} \omega_j |x_j| = N(X)$$

Donc si $AX = \lambda X$, on a :

$$|\lambda| N(X) \leq N(X)$$

et pour $X \neq 0$, vecteur propre associé à λ, on a $N(X) \neq 0$ et donc :

$$|\lambda| \leq 1.$$

8) a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Posons $Y = AX$, alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$ et donc

$$\Phi(AX) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i y_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_i a_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\omega_i)x_j \quad (*)$$

Or par définition de Ω, on sait que $A^\top\Omega = \Omega$ et donc pour chaque j, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\omega_i = \omega_j$, ce qui, dans $(*)$ donne :

$$\Phi(AX) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j x_j = \Phi(X)$$

b) Si $X \in \ker(\Phi) \cap E_1(A)$ alors $X \in \mathrm{Vect}(U)$ et $\Phi(X) = 0$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $X = \lambda U$ et $0 = \Phi(X) = \Phi(\lambda U) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \lambda$. Donc $X = 0$.
Les sous-espaces $E_1(A)$ et $\ker(\Phi)$ sont ainsi en somme directe.
Par ailleurs, $\dim(E_1(A)) = 1$ et $\dim(\ker(\Phi)) = n - 1$ (le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan). La somme de ces dimensions est égale à la dimension de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Des deux arguments précédents, on tire

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \ker(\Phi)$$

c) On suppose $AX = \lambda X$ et $\lambda \neq 1$. On a alors $\Phi(X) = \Phi(AX) = \Phi(\lambda X) = \lambda\Phi(X)$. Donc si $\lambda \neq 1$ on en déduit $\Phi(X) = 0$ c'est à dire que $X \in \ker(\Phi)$.

d) Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à A.
Le a) montre que $\ker(\Phi)$ est stable par f car si $\Phi(X) = 0$ alors $\Phi(AX) = 0$.
Bien sûr $E_1(A)$ est aussi stable par f.
Dans une base adaptée $\mathcal{B}_1$ à la décomposition $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \mathrm{Ker}(\Phi)$, la matrice de f est donc diagonale par bloc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Si 1 était valeur propre de B alors $E_1(A)$ serait de dimension ≥ 2 (on aurait deux vecteurs propres de f indépendants, l'un étant dans $E_1(A)$ et l'autre dans $\ker(\Phi)$ ce qui est exclu).
Donc 1 n'est donc pas racine de χ_B. Or $\chi_f = (X-1)\chi_B$ (déterminant diagonal par blocs) et 1 est donc racine simple de χ_f. Finalement, la valeur propre 1 est de multiplicité 1 dans $\chi_f = \chi_A$.

Remarque : dans les processus stochastiques en probabilité on itère l'action de A, donc on étudie les suites $(A^k X)$. Le point de vue des normes initié à la Q 7) est alors important pour faire de l'analyse, quand $k \to +\infty$ et trouver des limites.