D.M. 5 : réduction du produit de Kronecker

Pour le mardi 12 novembre 2024

Revoir les notations et définition du DM 3 sur le produit tensoriel. Vous avez le corrigé, c'est une bonne façon de retravailler le DM3 pendant les vacances.

On considère 2 matrices carrées, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$ et $B \in \mathbf{M}_p(\mathbf{K})$.

Q1) a) On considère X un vecteur propre de A pour la valeur propre λ et Y un vecteur propre de B pour la valeur propre μ. Montrer à l'aide des résultats du DM3 que le produit $\lambda\mu$ est une valeur propre de $A \otimes B$ et préciser un vecteur propre associé à cette valeur propre.

b) On suppose que A et B sont diagonalisables. A l'aide des résultats du DM3, montrer que $A \otimes B$ est diagonalisable et déterminer une base de vecteurs propres de $A \otimes B$ en fonction d'une base de vecteurs propres de A et d'une base de vecteurs propres de B.

c) exemple : montrer que $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et ses sous espaces propres.

Q2) On suppose dans cette question que $A \otimes B$ est diagonalisable et que $Sp_{\mathbf{K}}(A)$ contient une valeur non nulle.

Soit $\lambda \in Sp_{\mathbf{K}}(A)$ et U un vecteur propre pour la valeur propre λ. On note $U \otimes \mathbf{K}^{\boldsymbol{p}}$ le sous espace vectoriel de $\mathbf{K}^{\boldsymbol{np}}$ formé des vecteurs de la forme $U \otimes Y$ pour $Y \in \mathbf{K}^{\boldsymbol{p}}$.

a) Montrer que $U \otimes \mathbf{K}^{\boldsymbol{p}}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{K}^{\boldsymbol{np}}$ stable par $A \otimes B$.

b) On fixe une valeur propre non nulle λ_0 de A et U_0 un vecteur propre associé. En considérant la restriction de $A \otimes B$ à $U_0 \otimes \mathbf{K}^{\boldsymbol{p}}$ montrer que B est diagonalisable.

On suppose désormais que $A \otimes B$ est diagonalisable dans $M_{np}(\mathbf{K})$ et non nulle.

Q3) On suppose dans cette question que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Montrer que l'on a alors A et B diagonalisables.

On suppose désormais que $\mathbf{K} = \mathbf{R}, A \in M_n(\mathbf{R}), B \in M_p(\mathbf{R})$ et donc que $A \otimes B$ est diagonalisable dans $M_{np}(\mathbf{R})$ et non nulle. On rappelle que $M_k(\mathbf{R})$ est naturellement inclus dans $M_k(\mathbf{C})$.

Q4) Montrer que si l'une des deux matrices A ou B est diagonalisable alors l'autre l'est aussi.

Q5) On suppose dans cette question que A et B ne sont pas diagonalisables dans $M_n(\mathbf{R})$. On note S la matrice $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et si p est un entier naturel non nul, 0_p la matrice nulle carrée d'ordre p.

a) Montrer que toute valeur propre complexe non nulle de A ou de B est dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.

b) Soit $\lambda \in Sp_{\mathbf{C}}(A)$ et $\mu \in Sp_{\mathbf{C}}(B)$ non nulles. Montrer que $\lambda\mu \in \mathbf{R}$ et $\lambda\bar{\mu} \in \mathbf{R}$. En déduire que λ^2 et μ^2 sont des nombres réels et donc que $\lambda \in i\mathbf{R}$ et $\mu \in i\mathbf{R}$.

c) Soit $\alpha \in]0, +\infty[$ tel que $i\alpha \in Sp_{\mathbf{C}}(A)$ et $X \in \mathbf{C}^n$ un vecteur propre associé. Montrer que $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}[(X + \bar{X}), i(X - \bar{X})]$ est un sous espace vectoriel de dimension deux de $\mathbf{R}^n$ stable par A. Quelle est la matrice de l'endomorphisme induit par A dans la base $((X + \bar{X}), i(X - \bar{X}))$ de $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}[(X + \bar{X}), i(X - \bar{X})]$?

d) Montrer que si $(X_1, \bar{X}_1, X_2, \bar{X}_2, \ldots, X_r, \bar{X}_r)$ est une famille $\mathbf{C}$-libre de vecteurs dans $\mathbf{C}^n$ alors la famille

$$\left(X_1 + \bar{X}_1, i\left(X_1 - \bar{X}_1\right), X_2 + \bar{X}_2, i\left(X_2 - \bar{X}_2\right), \ldots, X_r + \bar{X}_r, i\left(X_r - \bar{X}_r\right)\right)$$

est $\mathbf{R}$-libre dans $\mathbf{R}^n$.

e) Montrer qu'il existe un couple d'entiers naturels non nuls (r,s) et $(\alpha_1,\dots,\alpha_r) \in (]0,+\infty[)^r$, $(\beta_1,\dots,\beta_s) \in (]0,+\infty[)^s$ tels que :

$$A \text{ est semblable à } \begin{bmatrix} \alpha_1 S & & & \\ & \ddots & (0) & \\ & (0) & \alpha_r S & \\ & & & 0_{n-2r} \end{bmatrix} \text{ et } B \text{ semblable à } \begin{bmatrix} \beta_1 S & & & \\ & \ddots & (0) & \\ & (0) & \beta_s S & \\ & & & 0_{p-2s} \end{bmatrix}$$

En déduire que A et B sont semblables à des matrices antisymétriques.

Q6) Montrer que : $\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R}), \forall N \in \mathbf{M}_p(\mathbf{R}), (M \otimes N)^\top = M^\top \otimes N^\top$

Q7) **Une réciproque : 5/2 seulement :** On suppose que M et N sont des matrices carrés non nulles, antisymétriques, dans $M_n(\mathbf{R})$.

a) Montrer qu'elles ne sont pas diagonalisables (on pourra montrer qu'elles ne possèdent pas de valeurs propres non nulles)

b) Etablir que $M \otimes N$ est diagonalisable.