D.M. 4 Matrices à diagonale dominante, irréductibles, v.p.

Pour le lundi 4 novembre 2024

Dans ce qui suit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, on note

$$\|X\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|.$$

1 Diagonale strictement dominante, Hadamard et Gerschgorin

Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On dit que :
A est *à diagonale strictement dominante* si et seulement si $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i, j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

Q1) Montrer le résultat suivant :

Lemme d'Hadamard : une matrice A à diagonale strictement dominante est *inversible.*

Indication – On pourra raisonner par l'absurde, considérer un $X \in \ker A \setminus \{0\}$ et considérer un indice i tel que $|x_i| = \|X\|_\infty$.

Q2) Avec la Q1) montrer le résultat suivant de localisation des valeurs propres :

Théorème de Gerschgorin : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ quelconque.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, notons $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Alors

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_f(a_{i,i}, r_i)$$

où $D_f(a,r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z-a| \leq r\}$ désigne le disque fermé de centre a et de rayon r.

Q3) Exemples :

i) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et comparer ce spectre aux disques de Gerschgorin.

La matrice précédente était symétrique. Pour les matrices non symétriques, on gagne souvent de l'information en appliquant le théorème de Gerschgorin à A et $A^\top$ car $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^\top)$.

ii) Par exemple, soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1+i & -3 & 1 \\ i & 2+i & i \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Montrer, sans calculer les valeurs propres de A, que $\rho(A) := \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ vérifie $\rho(A) \leq 8$.

Transition avec la suite : on peut se demander si on peut *affaiblir* la condition de *stricte domination* dans le lemme de Hadamard, en autorisant des inégalités *larges.* Du point de vue du théorème de Gerschgorin cela revient de manière vague pour l'instant à se demander ce qui se passe avec les valeurs propres sur le bord des disques.

On peut en effet obtenir des résultats de ce type en rajoutant une hypothèse *d'irréductibilité* de la matrice A, notion que nous étudions dans la partie II suivante. Nous reviendrons alors sur ces questions à la partie III.

2 Matrices réductibles et irréductibles

2.1 Action du groupe des permutations

On rappelle qu'une permutation σ de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ est une bijection de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ dans lui-même. L'ensemble des ces bijections forme un groupe pour la loi $\circ$ qu'on note souvent $(S_n,\circ)$ (appelé *groupe symétrique*)

Soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $E := \mathbb{K}^n$.

A chaque $\sigma \in S_n$, on peut associer l'endomorphisme $f_\sigma \in \mathscr{L}(E)$ défini par

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

et sa matrice $P_\sigma = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_\sigma) \in M_n(\mathbb{K})$.

Q4) Préciser pour chaque $(i,j) \in [\![1,n\ ]\!]^2$ la valeur de l'entrée (i,j) de la matrice P_σ.

Q5) Vérifier que l'application $(S_n,\circ) \to (GL(E),\circ)$, $\sigma \mapsto f_\sigma$ est un *morphisme de groupes.*

On en déduit immédiatement que l'application $(S_n,\circ) \to (GL_n(K),\times)$, $\sigma \mapsto P_\sigma$ est aussi un morphisme de groupes.

En particulier $\forall\, \sigma \in S_n$, $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

Q6) Montrer que si $\sigma \in S_n$, et $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ alors $P_\sigma^{-1} A P_\sigma$ a pour entrées les $(a_{\sigma(i),\sigma(j)})$.

2.2 Définition et première propriétés des matrices (ir)réductibles

Définition – Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ où $n \geq 2$ est dite *réductible* ssi il existe $\sigma \in S_n$ telle que la matrice $A' = P_\sigma^{-1} A P_\sigma$ s'écrive par bloc :

$$A' = \begin{pmatrix} U & V \\ 0 & W \end{pmatrix} \qquad (*)$$

avec $U \in M_r(\mathbb{K})$, $W \in M_{n-r}(\mathbb{K})$ et $0 < r < n$.
Sinon on dira que A est *irréductible.*

Q7) Donner un exemple d'une matrice *réductible*, par exemple dans $M_2(\mathbb{R})$, qui n'est pas déjà de la forme $(*)$.

Q8) Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{K})$ vérifie que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \neq 0$ alors A est *irréductible.*

Q9) Dans cette question, on suppose $n = 2$.

i) Montrer que $A \in M_2(\mathbb{K})$ est *irréductible* si, et seulement si, $a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$.

ii) La réciproque à la question 8) est-elle vraie ?

Q10) On revient au cas général où $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$ quelconque.

i) montrer que si A est réductible, alors pour tout p entier naturel non nul, A^p est réductible.

ii) En déduire que s'il existe p entier naturel non nul tel que tous les coefficients de A^p soient non nuls, alors A est irréductible.

iii) Appliquer ce qui précède pour déterminer si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est irréductible.

iv) Montrer que la réciproque du ii) est fausse.

Q11) Une nouvelle caractérisation des matrices irréductibles :

On va montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $A \in M_n(\mathbb{K})$ est *réductible*

(2) on peut écrire $\mathbb{N}_n := [\![1,n\ ]\!]$ comme réunion disjointe de deux sous-ensembles non vides (partition) :

$$[\![1,n\ ]\!] = I \coprod J$$

de sorte que $\forall (i,j) \in I \times J$, $a_{i,j} = 0$.

i) On suppose que la condition (2) est réalisée. On note p le cardinal de J où $1 < p < n$. En utilisant une permutation σ de $\mathbb{N}_n$ telle que $\sigma(\mathbb{N}_p) = J$, montrer que A est réductible.

ii) Montrer la réciproque $(1) \Rightarrow (2)$.

Q12) Caractérisation géométrique (mais toujours attachée à une base) : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $v \in \mathscr{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$.
Montrer que la matrice A est *réductible* si et seulement si il existe une partie L de $\mathbb{N}_n$ non vide et distincte de $\mathbb{N}_n$ telle que $\mathrm{Vect}(e_k, k \in L)$ soit stable par v.

Q13) Le résultat suivant sera utile dans la partie suivante : montrer que si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est irréductible alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A - \lambda I$ est irréductible.

3 Extension de Hadamard et Gerschgorin pour les matrices irréductibles

Définition – Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite à diagonale *fortement dominante* si, et seulement si,

$$\begin{cases} \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ |a_{i,i}| \geq \sum\limits_{j \neq i} |a_{i,j}|, \\ \text{et} \\ \exists\, i_0 \in [\![1, n]\!],\ |a_{i_0,i_0}| > \sum\limits_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|. \end{cases}$$

Q14) On va alors montrer le :

Lemme d'Hadamard étendu pour les matrices irréductibles : une matrice *à diagonale fortement dominante* et *irréductible* est *inversible.*

Soit donc $A \in M_n(\mathbb{K})$ irréductible, à diagonale fortement dominante.
L'idée est de reprendre la preuve de la première question :
par l'absurde s'il existe un $X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = 0$, on note

$$I = \{i \in [\![1, n]\!],\ |x_i| = \|X\|_\infty\}.$$

a) Montrer que pour tout $i \in I$, $|a_{i,i}| = \sum\limits_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

b) Montrer que pour tout $i \in I$, $\sum\limits_{j \neq i} |a_{i,j}|(\|X\|_\infty - |x_j|) \leq 0$.

En déduire qu'en notant J le complémentaire de I dans $[\![1, n]\!]$, pour tout $(i, j) \in I \times J$, $a_{i,j} = 0$.

c) Conclure pour la contradiction cherchée.

Q15) De même montrer que ce lemme de Hadamard donne une amélioration du résultat sur les disques de Gerschgorin :

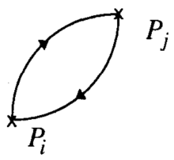
Précision sur Gerschgorin pour les matrices irréductibles : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice irréductible. Si une valeur propre λ de A n'est dans l'intérieur d'aucun des disques de Gerschgorin $D_f(a_{i,i}, r_i)$ où $r_i = \sum\limits_{j \neq i} |a_{i,j}|$ alors λ est sur l'intersection de *tous* les cercles de Gerschgorin $C(a_{i,i}, r_i)$ (bords de ces disques).

Q16) Exemple : supposons que pour une matrice $A \in M_2(\mathbb{K})$ les deux disques de Gerschgorin soient $D_f(1, 1)$ et $D_f(3, 1)$ et qu'on sait que A admet une valeur propre de module 2. Que vaut cette valeur propre ?

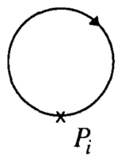
4 Une façon pratique de voir l'irréductibilité d'une matrice

4.1 Graphe orienté associé à une matrice

Le concept d'irréductibilité peut être illustré graphiquement. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$ et $\{P_i \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ un ensemble de n points distincts du plan. Pour chaque couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $a_{ij} \neq 0$, on trace une flèche allant du point P_i vers le point P_j. Si a_{ij} et a_{ji} sont non nuls, il y aura une flèche du point P_i vers le point P_j et une autre de P_j vers P_i. Si $a_{ii} \neq 0$ on tracera une boucle allant de P_i vers lui-même.



$a_{ij} \neq 0$ et $a_{ji} \neq 0$



$a_{ii} \neq 0$

On associe ainsi à chaque matrice A ce que l'on appelle un *graphe orienté* dont A est la *matrice d'adjacence* (cf. cours d'informatique).

Q17) Dessiner le graphe associé à chacune des deux matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2 Caractérisation de l'irréductibilité avec le graphe

Q18) On veut montrer que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est irréductible si et seulement si la propriété (P) suivante est vérifiée :

$$(P) \quad \forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow \begin{cases} a_{i,j} \neq 0 \\ \text{ou} \\ \exists s \in \mathbb{N}^*,\ \exists i_1, i_2, \dots, i_s \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i_1}.a_{i_1,i_2} \dots a_{i_{s-1},i_s}.a_{i_s,j} \neq 0. \end{cases}$$

où $a_{i,i_1}.a_{i_1,i_2} \dots a_{i_{s-1},i_s}.a_{i_s,j}$ désigne le *produit* de ces termes.

i) Traduire cette propriété comme une propriété du graphe associé à A (appelée *forte connexité*).

ii) Etablir que la condition (P) est suffisante pour que A soit irréductible.

iii) On suppose maintenant que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est irréductible. Pour chaque indice $i \in [\![1,n]\!]$, on définit X_i comme l'ensemble des indices j de $[\![1,n]\!] \setminus \{i\}$ tels que :

$$\begin{cases} \text{ou bien } a_{i,j} \neq 0 \\ \text{ou bien il existe } i_1, \dots, i_s \text{ tels que le produit } a_{i,i_1} a_{i_1,i_2} \dots a_{i_{s-1},i_s} a_{i_s,j} \text{ soit différent de 0.} \end{cases}$$

Montrer que $X_i = [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$ et en déduire que la condition (P) est nécessaire.

Q19) Déduire de ce qui précède si les matrices A_1 et A_2 de la Q 17) sont réductibles ou irréductibles.

Q20) Retrouver aussi à l'aide de cette caractérisation le fait que si A est irréductible alors $A - \lambda I$ est aussi irréductible.

5 Propriétés des matrices réelles : positivité, monotonie

Dans cette section pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$ (resp. $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$) on note :

$$M \geq 0 \Leftrightarrow \forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} \geq 0$$

et

$$X \geq 0 \Leftrightarrow \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ x_i \geq 0$$

Q21) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$A \geq 0 \Leftrightarrow [\forall\, X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \ \geq 0 \Rightarrow AX \geq 0]$$

Définition – Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
On dit que A est *monotone* si, et seulement si, A est inversible et $A^{-1} \geq 0$.

Q22) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est *monotone* si, et seulement si,

$$\forall\, X \ \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$$

Q23) La matrice suivante est importante en analyse numérique : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Montrer que A est à diagonale fortement dominante et irréductible.

Q24) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

i) $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} > 0$,

ii) $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \ \Rightarrow a_{i,j} \leq 0$

iii) et A est à diagonale strictement dominante

Montrer qu'alors A est monotone.

Indication – Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX \geq 0$. Soit $x_m = \min\limits_{i \in [\![1,n]\!]} x_i$. On veut donc montrer que $x_m \geq 0$. On note $Y = AX$. On exprimera $a_{m,m}x_m$ à l'aide de y_m et des autres x_i.

Q25) Montrer que dans les hypothèses de la Q24, on peut remplacer l'hypothèse (iii) par :

(iii bis) A est inversible, à diagonale dominante au sens large $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| \geq \sum\limits_{j \neq i, j=1}^{n} |a_{i,j}|$

en gardant la même conclusion.

Q26) En déduire que la matrice A de la Q23) est monotone.

Q27) **Pas pour ce D.M. : à faire après le cours de Topo.** Norme des matrices positives et des matrices monotones :

Pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on a noté $\|X\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$.

Mais pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on va noter $|||A|||_\infty$ la norme subordonnée à la norme précédente autrement dit :

$$|||A|||_\infty = \max_{\|X\|_\infty = 1} \|AX\|_\infty = \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$$

On peut montrer, mais nous l'admettrons ici pour ne pas allonger ce sujet déjà long que :

$$\forall\, A \in M_n(\mathbb{R}),\ |||A|||_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

Soit $E = (1 \ \dots 1)^\top \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer alors :

(i) Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice positive alors $|||M|||_\infty = \|ME\|_\infty$.

(ii) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice monotone et $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $AX = E$ alors

$$|||A^{-1}|||_\infty = \|X\|_\infty.$$