MP **Samedi 21 Septembre 2024**

Devoir surveillé 1 (4h)

Les calculatrices et autres appareils électroniques (téléphones etc.), l'usage de stylo à encre effaçable et des blancs de correction sont interdits. Les couleurs autorisées sont le bleu, le noir et le rouge est toléré pour les encadrés. Encadrez ou soulignez vos résultats, séparez clairement vos questions, la clarté de votre présentation est un élément important d'appréciation.

Questions de cours à traiter en début de copie

Q0 a) Citer la formule de Taylor reste intégral avec ses hypothèses, et en déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exp(x) \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Q0 b) Citer la formule de Taylor-Lagrange avec ses hypothèses, et en déduire que pour tout $x \in [0,1]$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1+x)$$

Problème :

Partie I :

1) a) Soit $x \in]-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x^i + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$, puis que

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t.$$

b) En déduire que pour tout $x \in]-1,1]$, on a $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$.

N.B La démonstration attendue est donc différente de celle de la Q0 b). Ici, on majorera simplement $\dfrac{t^n}{1+t}$ dans la formule du a) de sorte à traiter le terme en intégrale.

c) En déduire que $\ln 2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}$.

2) On fixe un entier $p \in \mathbb{N}$.

a) Déterminer un entier N tel que $\left| \ln 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq 10^{-p}$.

b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k2^k} \leq \frac{1}{2^n}$.

c) En déduire un entier N' tel que $\left| \ln 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{N'} \frac{1}{k2^k} \right| \leq 10^{-p}$.

Partie II :

3) On fixe ici $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Démontrer l'existence et unicité d'un polynôme $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(-1) - P(X) = (X+1)\varphi_n(P)$.

4) a) Soit φ_n l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ainsi obtenue. Démontrer que φ_n est linéaire.

b) Déterminer $\ker \varphi_n$ et $\mathrm{Im}\ \varphi_n$.

5) a) Calculer explicitement $\varphi_n(X^k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et expliciter la matrice de φ_n dans les bases canoniques ordonnées suivant les puissances croissantes de X.

b) Soit $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Montrer que $\varphi_n(P) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j$ où pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $b_j = (-1)^j \displaystyle\sum_{i=j+1}^{n} (-1)^i a_i$.

Partie III :

On se donne ici $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et on note $S(f) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} \mathrm{d}x$ et $u_n(f) = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x) \mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) On souhaite étudier la nature de la série $\sum (-1)^n u_n(f)$.

a) Sous l'hypothèse supplémentaire que f est positive sur $[0,1]$, justifier la convergence de $\sum(-1)^n u_n(f)$, sans chercher à en expliciter la somme.

b) On revient au cas général. En adaptant la méthode proposée en question 1b, prouver que $\sum(-1)^n u_n(f)$ converge et a pour somme $S(f)$.

7) On se donne de plus $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(-1) \neq 0$.

a) Montrer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{P(x)}{1+x} f(x)\mathrm{d}x = P(-1)S(f) - \int_0^1 \varphi_n(P)(x)f(x)\mathrm{d}x$.

b) Soit $M(P) = \max_{x\in[0,1]} |P(x)|$. Montrer que

$$\left|S(f) - \frac{1}{P(-1)} \int_0^1 \varphi_n(P)(x)f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{M(P)S(|f|)}{|P(-1)|}$$

Partie IV :

On considère la suite de polynômes (T_n) définie par : $\begin{cases} T_0 = 1,\ T_1 = 1-2X \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2(1-2X)T_{n+1} - T_n. \end{cases}$

8) Démontrer que (T_n) est une suite de $\mathbb{Z}[X]$. Que vaut $\deg T_n$ pour tout n ?

9) a) On pose $v_n = T_n(-1)$. Exprimer v_{n+2} en fonction de v_{n+1} et v_n.

b) En déduire v_n en fonction de n.

c) Le réel -1 est-il racine de T_n ?

10) a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\sin^2\theta) = \cos(2n\theta)$.

b) Déterminer $M(T_n) = \max_{x\in[0,1]} |T_n(x)|$

11) En utilisant les résultats de la question 7b et en choisissant judicieusement P et f, construire une suite (t_n) de rationnels tels que $\ln 2 - t_n = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{(3+\sqrt{8})^n}\right)$

Partie V :

On revient dans cette partie aux résultats de la question 2 de la partie I pour tenter d'expliquer la différence entre les valeurs de N et N' obtenues alors. On note ici $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et $R'_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}$.

Estimation de R_n.

12) Montrer que $R_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

13) En intégrant par parties, déterminer un réel λ et un entier β tels que $R_n = \lambda\dfrac{(-1)^n}{n^\beta} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{n^{\beta+1}}\right)$.

14) En déduire un équivalent de R_n. Que dire de la nature de $\sum R_n$? Justifiez.

Estimation de R'_n.

15) Démontrer que $R'_n = \mathrm{o}(2^{-n})$.

Plus généralement, soit $f \in \mathcal{C}^1([1,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $\forall\, x \geq 1, f(x) > 0$ et $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \mu < 0$.

16) Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Big(\ln f(n+1) - \ln f(n)\Big) = \mu$.
On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.

17) En déduire (le a) et le b) sont indépendants) :

a) $\ln(f(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mu n$.

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)}$.

18) En déduire alors la nature de $\sum f(n)$.

19) Montrer qu'il existe une constante ν à préciser telle que $f(n+1) - f(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \nu f(n)$.

20) Déduire de ce qui précède une constante α telle que $R'_n \sim \dfrac{\alpha}{n2^n}$.

21) a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2^t}dt$ est bien définie et calculer sa valeur. On ne demande pas de justifier ici (c'est immédiat) que cela entraîne la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t2^t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2 2^t}dt$

b) Démontrer que $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2 2^t}\mathrm{d}t = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2 2^n}\right)$.

c) À l'aide d'une intégration par parties en déduire un équivalent de $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{t2^t}\mathrm{d}t$.

d) A-t-on $R'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{t2^t}\mathrm{d}t$?