$\boxed{\text{D.S. 1 : solutions}}$

Problème : d'après E3A MP 2009

Partie I.

1) .

a) La première égalité est la formule de sommation des suites géométriques de raison $-x \neq 1$. La deuxième vient en intégrant la 1ère entre 0 et x.

b) Il suffit de montrer que $I_n := \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, à x fixé dans $]-1,1]$.

1er cas : $x \in [0,1]$ Dans ce cas $\forall\, t \in [0,x] \subset [0,1]$, $0 \leq \dfrac{t^n}{1+t} \leq t^n$ et donc

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

Par encadrement, on conclut bien que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2ème cas : $x \in]-1,0]$. Dans ce cas $\forall\, t \in [x,0]$, $0 < 1+x \leq 1+t \leq 1$ donc

$$0 \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1+x} \quad (*)$$

Par inégalité triangulaire sur les intégrales dans ce cas :

$$|I_n| \leq \int_x^0 \frac{|t|^n}{1+t} dt$$

et donc par $(*)$

$$|I_n| \leq \frac{1}{1+x} \int_x^0 |t|^n dt$$

Par parité de $t \mapsto |t|^n$, on a $\displaystyle\int_x^0 |t|^n dt = \int_0^{|x|} t^n dt \leq \frac{1}{n+1}$ comme dans le premier cas. Ainsi ici

$$|I_n| \leq \frac{1}{(1+x)(n+1)}$$

et on conclut encore que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) La 1ère égalité est immédiate en prenant $x = 1$ dans l'égalité du b).
Pour la seconde, on prend $x = -1/2$ dans cette même égalité, on obtient :

$$\ln(1/2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}(-1)^k}{k2^k}$$

Comme $\ln(1/2) = -\ln(2)$ et $(-1)^{k-1}.(-1)^k = -1$ en simplifiant par (-1) dans les deux membres de cette égalité, on obtient l'égalité demandée.

2) a) Comme $(1/n)$ tend vers zéro, en décroissant la série $\sum \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ vérifie le théorème de convergence des séries alternées spéciales.
Par majoration du reste donnée par ce théorème, on sait que :

$$|R_{N+1}| = \left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \leq \frac{1}{N+1}$$

Il suffit donc de prendre un entier N tel que $\frac{1}{N+1} \leq 10^{-p}$, donc $N \geq 10^p - 1$.

b) Pour tout $k \geq 1$, on sait que $\frac{1}{k2^k} \leq \frac{1}{2^k}$, et donc en sommant $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$.

c) On a $\left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{N'} \frac{1}{k2^k}\right| = \sum_{k=N'+1}^{\infty} \frac{1}{k2^k} \leq \frac{1}{2^{N'}}$ d'après la question précédente. Il suffit de prendre un entier N' tel que $\frac{1}{2^{N'}} \leq 10^{-p}$, et donc tout $N' \geq \frac{\ln 10}{\ln 2} p$ fait l'affaire.

La série du c) converge beaucoup plus vite que celle du a) : cf. V et le chapitre sur les séries entières

Partie II.

3) Comme -1 est racine du polynôme $P(-1)-P(X)$, le polynôme $X+1$ le divise, d'où l'existence de $\varphi_n(P)$ (de degrè $\deg P-1$), et son unicité par unicité du quotient dans la division euclidienne.

4) a) Soit $P_1, P_2 \in \mathbf{R}_n[X], \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$.
En multipliant les relations

$$P_i(-1) - P_i(X) = (X+1)\varphi_n(P_i)$$

par λ_i pour $i = 1, 2$ et en les ajoutant, on obtient

$$(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(-1) - (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(X) = (X+1)(\lambda_1\varphi_n(P_1) + \lambda_2\varphi_n(P_2))$$

et donc $\lambda_1\varphi_n(P_1)+\lambda_2\varphi_n(P_2)$ satisfait la propriété caractérisant le polynôme $\varphi_n(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)$, ils sont donc égaux par l'unicité du 3).

b) On a par intégrité de $\mathbf{R}[X]$:

$$\varphi_n(P) = 0 \Leftrightarrow P(-1) - P(X) = 0 \Leftrightarrow P \text{ est constant}$$

d'où $\operatorname{Ker}\varphi_n = \mathbf{R}_0[X]$
Par définition l'image de ϕ_n est un s.e.v. de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$. Or elle est de dimension n à cause de la formule du rang, donc de même dimension que $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, donc $\operatorname{Im}\varphi_n = \mathbf{R}_{n-1}[X]$.

5) a) On connaît l'identité

$$a^p - b^p = (a-b)\sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k}b^k$$

valable, pour tout $p \geq 1$, dans n'importe quel anneau commutatif.
Appliquée ici à $a = -1$ et $b = X$ dans $\mathbb{R}[X]$, elle fournit pour $P = X^p$:

$$P(-1) - P(X) = -(1+X)\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}X^k$$

donc

$$\varphi_n(X^p) = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}X^k$$

pour tout p tel que $1 \leq p \leq n$. Puisque $\varphi_n(1) = 0$, la matrice cherchée est donc

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & \cdots & \cdots & (-1)^n \\ \vdots & 0 & -1 & 1 & & (-1)^{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Plus précisément, $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![0,n-1]\!]\times[\![0,n]\!]}$ est une matrice à n lignes et $n+1$ colonnes, dans laquelle m_{ij} est le coefficient de X^i dans $\varphi_n\left(X^j\right)$; donc $m_{ij} = 0$ si $i \geq j$, et vaut $(-1)^{j-i}$ sinon.

b) On utilise la matrice : pour tout $(i,j), a_i$ est la i-ème coordonnée de P dans la base canonique, et b_j la j-ème coordonnée de $\varphi_n(P)$. On a donc, pour tout j,

$$b_j = \sum_{i=0}^{n} m_{j,i}a_i = \sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i-j}a_i$$

qui donne bien le résultat demandé puisque $(-1)^{-j} = (-1)^j$.

Partie III.

6) a) L'idée est d'essayer d'appliquer le théorème de convergence des séries alternées spéciales :
• Comme $f \geq 0$, les termes $u_n(f)$ dont tous positifs donc $\sum(-1)^n u_n(f)$ est bien d'une série alternée
• l'inégalité, valide pour $t \in [0,1], 0 \leq t^{n+1} \leq t^n$ donne quant à elle, après multiplication par $f(t)$ et intégration, que $u_{n+1}(f) \leq u_n(f)$ donc $(u_n(f))$ est décroissante.
• Comme f est une fonction continue sur un segment, elle est bornée. Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0,1]$. On a alors la majoration

$$0 \leq u_n(f) \leq M \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t = \frac{M}{n+1}$$

donc $u_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi on a vérifié les hypothèses du théorème et $\sum(-1)^n u_n(f)$ converge.

b) D'après 1a, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{f(x)}{1+x} = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i x^i f(x) + \frac{(-1)^n x^n f(x)}{1+x},$$

d'où en intégrant

$$S(f) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i u_i(f) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n f(x)}{1+x} \, \mathrm{d}x.$$

Il s'agit donc de prouver que le terme intégral tend vers 0 quand $n \to \infty$. Or, en notant $M = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$, par croissance de l'intégrale :

$$\left|\int_0^1 \frac{x^n f(x)}{1+x} \, \mathrm{d}x\right| \leq M \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, \mathrm{d}x \leq M \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \frac{M}{n+1}$$

avec ce majorant qui tend vers 0, on a la conclusion.

7) a) Par définition de φ_n, on sait que $P(X) - P(-1) = -(1+X)\varphi_n(X)$. Donc pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{P(x) - P(-1)}{1+x} f(x) = -\varphi_n(P)(x) f(x),$$

égalité que l'on intègre sur $[0,1]$ en séparant les deux termes au numérateur de la fraction pour obtenir :

$$\int_0^1 \frac{P(x)f(x)}{1+x} dx - P(-1) \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx = -\int_0^1 \varphi_n(P)(x) f(x) dx$$

ce qui donne l'égalité demandée par définition de $S(f)$:

$$\int_0^1 \frac{P(x)}{1+x} f(x) dx = P(-1) S(f) - \int_0^1 \varphi_n(P)(x) f(x) dx.$$

b) A partir du résultat du a), en divisant par $P(-1)$:

$$\left|S(f) - \frac{1}{P(-1)} \int_0^1 \varphi_n(P)(x) f(x) \mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{P(-1)} \int_0^1 \frac{P(x)}{1+x} f(x) \mathrm{d}x\right| \quad (1)$$

puis par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale

$$\left|\frac{1}{P(-1)} \int_0^1 \frac{P(x)f(x)}{1+x} \, \mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{|P(-1)|} \int_0^1 \frac{|f(x)||P(x)|}{1+x} \leq \frac{M}{|P(-1)|} \int_0^1 \frac{|f(x)|}{1+x} \, \mathrm{d}x = \frac{M}{|P(-1)|} S(|f|) \quad (2)$$

Avec (1) et (2), on a la conclusion.

Partie IV.

8) On note $H(n)$ la propriété $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ et $\deg T_n = n$. On va montrer par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(n)$ est vraie.

• **Initialisation :** $H(0)$ et $H(1)$ sont vraies par la forme explicite donnée par l'énoncé.

• **Hérédité :** Supposons que pour un $n \geq 0$, $H(n)$ et $H(n+1)$ sont vraie. Montrons que $H(n+2)$ est vraie.

Comme $\mathbb{Z}[X]$ est un anneau et que les polynômes T_n, T_{n+1} et $2(1-2X)$ sont dans $\mathbb{Z}[X]$, on déduit de la formule $T_{n+2} = 2(1-2X)T_{n+1} - T_n$ que $T_{n+2} \in \mathbb{Z}[X]$.

D'autre part si on note $a_{n,n}X^n$ le monôme dominant de T_n et $a_{n+1,n+1}X^{n+1}$ le monôme dominant de T_{n+1} la même relation dit que le monôme dominant de T_{n+2} est

$$2(-2X)a_{n+1,n+1}X^{n+1} = -4a_{n+1,n+1}X^{n+2}$$

ce qui montre bien (puisque ce coefficient n'est pas nul) que $\deg(T_{n+2}) = n+2$.

Ainsi $H(n+2)$ est vraie.

La récurrence est établie.

9) a) En utilisant la relation de récurrence vérifiée par (T_n) évaluée en -1, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+2} = 6v_{n+1} - v_n.$$

b) La suite (v_n) vérifie donc une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants; son polynôme caractéristique $X^2 - 6X + 1$ ayant deux racines simples $3+\sqrt{8}$ et $3-\sqrt{8}$, on sait qu'il existe deux réels λ, μ tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = \lambda(3+\sqrt{8})^n + \mu(3-\sqrt{8})^n$$

Enfin compte-tenu du fait que $v_0 = 1$ et $v_1 = 3$, on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{(3+\sqrt{8})^n + (3-\sqrt{8})^n}{2}$$

c) Par $T_n(-1) = v_n$ et par la question précédente comme $3-\sqrt{8} > 0$ on sait que $v_n > 0$ donc non (-1) n'est pas racine de T_n.

10) a) Par récurrence double, on note H_n la propriété : $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\sin^2\theta) = \cos(2n\theta)$.

• Initialisation : Soit $\theta \in \mathbf{R}$. On a bien $T_0\left(\sin^2\theta\right) = 1 = \cos(2\cdot 0\cdot\theta)$ et $T_1\left(\sin^2\theta\right) = 1 - 2\sin^2\theta = \cos(2\theta)$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ et $H(n+1)$ sont vraies. Alors

$$T_{n+2}\left(\sin^2\theta\right) = 2\cos(2\theta)\cos(2(n+1)\theta) - \cos(2n\theta) = \cos(2(n+2)\theta)$$

en utilisant $2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, donc $H(n+2)$ est vraie.

La récurrence (double) est établie

b) Comme $x \in [0,1]$, on peut choisir $\theta \in [0,\pi/2]$ tel que $\sqrt{x} = \sin\theta$. On a alors

$$|T_n(x)| = \left|T_n\left(\sin^2\theta\right)\right| = |\cos(2n\theta)| \leq 1$$

. De plus, pour $x = 0$, on a $\theta = 0$ donc $|T_n(x)| = 1$. On a donc $M_n = 1$.

N.B. Ces polynômes T_n sont des variantes des polynômes de Tchebychev lesquels sont définis, pour les polynômes de première espèce, par $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et ceux de deuxième espèce par :

11) Vu les questions précédentes, on applique le 7) b) à $P = T_n$ (possible car T_n est de degré n, et ne s'annule pas en -1) et $f = 1$ (car grâce à la partie 1 , on sait qu'alors $S(f) = S(|f|) = \ln 2$). La question 7 b de la Partie III. nous donne alors

$$\left|S(1) - \frac{1}{T_n(-1)}\int_0^1 \varphi_n\left(T_n\right)(x)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{M\left(T_n\right)S(|1|)}{|T_n(-1)|} = \frac{\ln 2}{v_n} \leq \frac{2\ln 2}{(3+\sqrt{8})^n} \qquad (*)$$

Remarque cruciale : comme $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ et comme le coefficient dominant de $X+1$ est 1 le quotient $\varphi_n(T_n)$ de la division euclidienne de T_n par $X+1$ est encore dans $\mathbb{Z}[X]$. Une primitive Φ_n de φ_n est alors dans $\mathbb{Q}[X]$ et donc :

$$\int_0^1 \varphi_n(T_n) = [\Phi_n]_0^1 \in \mathbb{Q}$$

Ainsi en posant $t_n = \dfrac{1}{T_n(-1)} \displaystyle\int_0^1 \varphi_n(T_n)$, on a bien $t_n \in \mathbb{Q}$ et par $(*)$, $\ln 2 - t_n = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{(3+\sqrt{8})^n}\right)$

Partie V.

12) On évalue l'égalité de la question 1a) en $x=1$, on a bien :

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + (-1)\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$$

ce qui donne la formule demandée pour R_n.

13) Par I.P.P. où on dérive $\frac{1}{1+x}$ et on primitive x^n, il vient

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \quad (*)$$

Or

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+2}$$

ce qui donne que le dernier terme dans $(*)$ est un $\mathrm{O}\left(1/n^2\right)$.
Et d'autre part

$$\frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(1/n^2\right)$$

Ainsi avec $(*)$, on obtient :

$$R_n = \frac{(-1)^n}{2n} + \mathrm{O}\left(1/n^2\right)$$

et donc $\lambda = 1/2$ et $\beta = 1$.

14) Par le résultat précédent, on a $R_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}$. Attention cependant, contrairement à ce que la question pourrait le laisser penser ce n'est pas l'équivalent qui va donner la nature de la série puisque ce terme général est de signe variable.

En revanche avec le résultat précédent R_n est somme de $\frac{(-1)^n}{2n}$, terme général d'une série convergente par le théorème sur les séries alternées spéciales, et de $\mathrm{O}\left(1/n^2\right)$ terme général d'une série ACV.

15) On sait que $\frac{1}{k2^k} = \mathrm{o}\left(2^{-k}\right)$, et comme $2^{-k} \ge 0$, terme général d'une série convergente, par théorème de sommation des $o()$ dans le cas convergent, on sait que :

$$R'_n = o\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k}\Big) = 2^{-n}.$$

16) La fonction $\ln \circ f$ étant D^1 sur $]n, n+1[$ et C^0 sur$[n, n+1]$, il existe $c_n \in]n, n+1[$ tel que $\ln f(n+1) - \ln f(n) = \frac{f'}{f}(c_n)$. Par composition (la suite (c_n) tend vers $+\infty$ par minoration), on a bien

$$\lim_{n\to\infty} (\ln f(n+1) - \ln f(n)) = \mu.$$

17) a) Le terme général $x_n = \ln f(n+1) - \ln f(n)$ est équivalent à $y_n = \mu$, terme général de signe constant (négatif) d'une série divergente. Par sommation des équivalents dans le cas divergent, on a donc :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(f(k+1)) - \ln(f(k)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} y_k = \mu(n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mu n \quad (1)$$

Mais par télescopage

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(f(k+1)) - \ln(f(k)) = \ln(f(n)) - \ln(f(1)) \quad (2)$$

et par divergence vers $-\infty$ de ces sommes partielles, on sait que

$$\ln(f(n) - \ln f(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(f(n) \quad (3)$$

Avec $(1), (2), (3)$, on a bien :

$$\ln(f(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mu.n$$

b) Question plus facile :

$$f(n+1)/f(n) = \exp(\ln f(n+1) - \ln f(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\mu}$$

par continuité de exp.

18) **(M1)** Le plus simple est de s'appuyer sur la règle de d'Alembert, qui assure l'absolue convergence de la série des $f(n)$: en effet, $1|f(n+1)/f(n)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\mu} \in [0,1[$ par 17 b).

(M2) On peut aussi raisonner ainsi, à la Riemann : on a $n^2 f(n) = \exp(2\ln n + \ln f(n))$. Comme $2\ln n + \ln f(n) \sim \mu n$ par croissance comparée, et que $\mu n \to -\infty$, on a $n^2 f(n) \to 0$ et donc $f(n)$ est négligeable devant $1/n^2$, d'où la CVA de $\sum f(n)$.

N.B. Il est faux par contre de dire que $f(n) \sim \exp(\mu n)$, car on ne peut pas composer par exp des équivalents.

19) On écrit comme f ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$

$$f(n+1) - f(n) = f(n)\left(\frac{f(n+1)}{f(n)} - 1\right).$$

Puis, $\frac{f(n+1)}{f(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\mu}$ par Q 17 b), après composition par exp, continue en μ, donc

$$f(n+1) - f(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(n)(e^{\mu} - 1)$$

d'où le résultat demandé avec $\nu = e^{\mu} - 1$.

20) Continuons encore un peu avec le cas général : par positivité des termes, la convergence de $\sum f(n)$ et par l'équivalence $f(n) \sim \frac{1}{e^{\mu}-1}(f(n+1) - f(n))$ on peut appliquer le théorème de sommation des équivalents aux restes :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e^{\mu} - 1} \sum_{k=n+1}^{\infty} (f(k+1) - f(k)) = \frac{1}{1 - e^{\mu}} f(n+1) \quad (*)$$

On applique maintenant ce résultat à la fonction $f : t \mapsto f(t) = \frac{2^{-t}}{t}$, qui est bien C^1 avec $f > 0$ sur $[1, +\infty[$

On calcule $f'(t) = -\ln 2 f(t) - \frac{1}{t} f(t)$, donc $\frac{f'(t)}{f(t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mu = -\ln 2$.

Ainsi toutes les hypothèses qui précèdent la question 16 sont vérifiées par f. Donc par $(*)$ du début de cette question, appliquée à f, on a :

$$R'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1 - e^{\mu}} f(n+1) = 2\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n2^n}$$

donc le α de l'énoncé est égal à 1.

21) a) Soit $X > 1$

$$\int_1^X e^{-t\ln(2)} dt = [-\frac{1}{\ln(2)} e^{-t\ln(2)}]_1^X \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\ln(2)}$$

Ce qui montre que

$$\int_1^{+\infty} e^{-t\ln(2)} dt = \frac{1}{2\ln(2)}$$

b) Pour tout $t \in [n, +\infty[$, on a $\frac{1}{t^2 2^t} \le \frac{1}{n^2}\frac{1}{2^t}$, et on intègre cette inégalité (puisque ces intégrales convergent) :

$$0 \le \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2 2^t} dt \le \frac{1}{n^2} \int_n^{+\infty} \frac{1}{2^t} dt = \frac{1}{n^2}[-\frac{1}{\ln(2)} e^{-t\ln(2)}]_n^{+\infty} = \frac{1}{\ln(2) n^2 2^n}$$

Cette majoration montre le résultat voulu.

c) Par I.P.P. avec $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{2^t} = \exp(-t\ln(2)) \Leftarrow u(t) = -\frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{2^t} \\ v(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow v'(t) = -1/t^2 \end{cases}$ comme le terme de bord $u(t)v(t) = -\frac{1}{\ln(2) t 2^t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut faire l'I.P.P dans les intégrales entre n et$+\infty$ et on obtient :

$$\int_n^{+\infty} \frac{1}{t 2^t} dt = \frac{1}{\ln(2) n 2^n} + \frac{1}{\ln(2)} \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2 2^t} dt$$

Donc par le résultat du b),

$$\int_n^{+\infty} \frac{1}{t 2^t} dt = \frac{1}{\ln(2) n 2^n} + O(\frac{1}{n^2 2^n})$$

Ceci donne l'équivalent :

$$\int_n^{+\infty} \frac{1}{t 2^t} dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(2) n 2^n}$$

d) Non, pas ici, puisque $\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2 2^t}$ dt $\sim \frac{1}{\ln(2) n 2^n}$ alors qu'on a montré que $R'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n 2^n}$.