

D.M. 1 MP pour la rentrée 2024

Motivation – Parce que tout oscille, tout vibre, la trigonométrie est présente partout. Ce D.M. vous permettra de bonnes révisions sur la trigonométrie mais aussi un peu d'algèbre linéaire/ bilinéaire de première année en ouvrant sur le cours aussi bien de physique que de maths de 2ème année.

1 Polynômes trigonométriques :

1.1 Les harmoniques d'un son

Quelle est la différence entre le "la" d'une guitare, d'un violon, d'un hautbois, d'un piano ou d'un diapason ? Le son est une vibration de l'air, qui provient par exemple d'une vibration de la corde de l'instrument ou bien de l'air dans un tuyau, et chaque note correspond à une fréquence, p.ex. 440 Hz pour le "la" du milieu du piano. Mais en réalité chaque instrument (à part le diapason) produit, pour une note donnée, une vibration beaucoup plus complexe composée d'un signal sinusoïdal "principal" $t \mapsto A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ où $\omega = 2\pi f$, avec f la fréquence (dite fréquence fondamentale), auquel s'ajoutent d'autres fonctions $t \mapsto A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2)$ (qui est la note à l'octave), $t \mapsto A_3 \cos(3\omega t + \varphi_3)$ la note à la quinte au-dessus etc.. Ces différentes fréquences kf sont appelées les *harmoniques* de la fréquence fondamentale.

Le signal s représentant le son en fonction du temps (qu'on peut voir comme la pression sur le microphone qui enregistre notre son) s'écrit, en première approximation, comme une somme de la forme :

$$t \mapsto s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \quad (1)$$

avec $A_0 \in \mathbb{R}$, et $\forall k > 0, A_k \in \mathbb{R}^+, \varphi_k \in \mathbb{R}$.

Pourquoi *en première approximation* ? Parce qu'en réalité le bon modèle mathématique pour étudier *tous les signaux T-périodiques* consistera à considérer des *sommes infinies* c'est-à-dire possiblement avec une infinité d'harmoniques, ce qui mathématiquement posera des conditions de *convergence de série*, mais nous n'en sommes pas encore là. Ce modèle s'applique non seulement aux sons mais vous l'étudierez pour les signaux électriques, ou encore même, vous le verrez, à la propagation de la chaleur (une idée géniale de J. Fourier).

Q1) Montrer que la fonction s définie par la formule (1) s'écrit aussi :

$$t \mapsto s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \quad (2)$$

et exprimer les coefficients a_k et b_k en fonction des A_k et φ_k .

Q2) Réciproquement, montrer que toute fonction définie par la formule (2) avec $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$ quelconques s'écrit sous la forme (1) et préciser la valeur des coefficients amplitudes A_k et déphasage φ_k en fonction des a_k et b_k .

1.2 L'espace vectoriel des fonctions polynomiales trigonométriques

Définition : soit $\omega > 0$ et $T = 2\pi/\omega$. On note $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues T -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On notera ici \mathcal{P}_ω le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par toutes les fonctions

$$co_k : t \mapsto \cos(k\omega t) \quad \text{et} \quad si_k : t \mapsto \sin(k\omega t)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Q3) Justifier que les éléments de \mathcal{P}_ω sont *exactement* les fonctions s vérifiant la formule (2) pour un certain N . On les appelle « fonctions polynomiales trigonométriques » ou encore « polynômes trigonométriques ».

Une première question naturelle à se poser est celle de *l'indépendance linéaire* de la famille des fonctions $((co_k)_{k \in \mathbb{N}}, (si_k)_{k \in \mathbb{N}^*})$, ce qui est équivalent au problème de *l'unicité* des coefficients a_k et b_k dans (2).

Bien qu'on puisse résoudre ce problème directement, on préfère ici déduire cette indépendance de la structure euclidienne que l'on va maintenant introduire et qui va être cruciale pour *géométriser* notre problème et ainsi obtenir une formule de *calcul* des coefficients a_k et b_k .

En outre, en vue du § 2 où on étudiera des signaux discontinus, on élargit l'espace des fonctions qu'on va étudier aux fonctions continues par morceaux en rajoutant une condition au point de discontinuité.

Définition : on va noter $\mathcal{CM}_{T,r}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions f continues par morceaux, T -périodiques, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , « régularisées » c'est-à-dire telles qu'en tout point $t_0 \in \mathbb{R}$, on ait

$$f(t_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \right).$$

Remarque : Bien sûr, on a les inclusions ::

$$\mathcal{P}_\omega \subset \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{CM}_{T,r}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \subset \mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

où $\mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l.e.v. de toutes les fonctions continues par morceaux T -périodiques.

La condition de régularité aux points de discontinuité va déjà être utile pour la question qui suit :

Définition : pour tout $(f, g) \in \mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$, on pose $(f|g) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt$

Q4) Montrer que $(f, g) \mapsto (f|g)$ est un produit scalaire dans $\mathcal{CM}_{T,r}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc en particulier aussi dans \mathcal{P}_ω . Expliquer pourquoi cette application ne définit pas un produit scalaire dans $\mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Q5) Montrer que la famille $((co_k)_{k \in \mathbb{N}}, (si_k)_{k \in \mathbb{N}^*})$ est une famille orthogonale pour ce produit scalaire.

Q6) Conclure que la famille précédente est une *base* orthogonale de \mathcal{P}_ω .

Q7) Déduire de ce qui précède la formule de *récupération* suivante des coefficients a_k et b_k apparaissant dans la formule (2) :

$$\forall s \in \mathcal{P}_\omega, \forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(k\omega t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(k\omega t) dt. \quad (3)$$

et montrer que si on pose aussi $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(0\omega t) dt$ alors avec les notations de (2), on a aussi

$$A_0 = a_0/2.$$

Remarquer que $A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$ est aussi ce qu'on appelle *valeur moyenne* de la fonction périodique s .

2 Analyse harmonique des fonctions de $\mathcal{CM}_{T,r}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

On ne se restreint plus à l'espace \mathcal{P}_ω mais on ne se place dans l'espace $E := \mathcal{CM}_{T,r}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues par morceaux T -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , régularisées, comme défini avant la Q 4.

L'idée est de voir si on peut approcher $f \in E$ par une fonction polynomiale trigonométrique définie comme suit : on pose comme à la formule (3),

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt, \quad b_k(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt. \quad (4)$$

Les nombres $a_k(f)$ et $b_k(f)$ sont appelés *coefficients de Fourier* de f .

On se demande donc si les polynômes trigonométriques

$$S_N(f) : t \mapsto \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^N a_k(f) \cos(k\omega t) + b_k(f) \sin(k\omega t)$$

approchent la fonction T -périodique f , en un certain sens. Quel sens donner au mot « approcher » ?

La réponse est multiple, elle va dépendre du *type* de convergence (ou pas) qu'on espère pour $S_N(f)(t)$ vers $f(t)$ quand $N \rightarrow +\infty$. Une première interprétation géométrique est encourageante :

2.1 Une interprétation géométrique de $S_N(f)$

- Q8)** Montrer que dans $E := \mathcal{CM}_{T,r}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni du produit scalaire de la Q 4, pour tout $f \in E$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(f)$ est le *projeté orthogonal* de f sur $\mathcal{P}_{\omega,N} := \text{Vect}((co_k)_{k \in [0,N]}, (si_k)_{k \in [1,N]})$.

Avant de considérer des exemples de calcul de $S_N(f)$, on fait déjà des remarques générales sur les calculs de ces coefficients.

2.2 Conséquences des propriétés de symétrie de f sur les a_k et b_k

- Q9)** Justifier que pour tout $f \in \mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et tout $c \in \mathbb{R}$, $\int_c^{c+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$.

- Q10)** Montrer que si f est une fonction *paire* alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $b_k(f) = 0$.

- Q11)** Donner et prouver un énoncé analogue pour les fonctions *impaire*.

- Q12)** On suppose que f est impaire et que, en plus, au sein de chaque période, on a une symétrie supplémentaire définie par la formule suivante :

$$\forall u \in \mathbb{R}, f\left(\frac{T}{4} + u\right) = f\left(\frac{T}{4} - u\right).$$

Préciser ce que signifie cette relation géométriquement sur le graphe de f et montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, b_{2k}(f) = 0$$

2.3 Deux calculs explicites de développement de Fourier $S_N(f)$

2.3.1 Exemple d'une fonction créneau

Soit $f : [0, T[, t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0, T/2[, \\ -1 & \text{si } t \in]T/2, T[\\ 0 & \text{si } t = 0 \text{ ou } t = T/2 \end{cases}$ qu'on prolonge en fonction T -périodique sur \mathbb{R} .

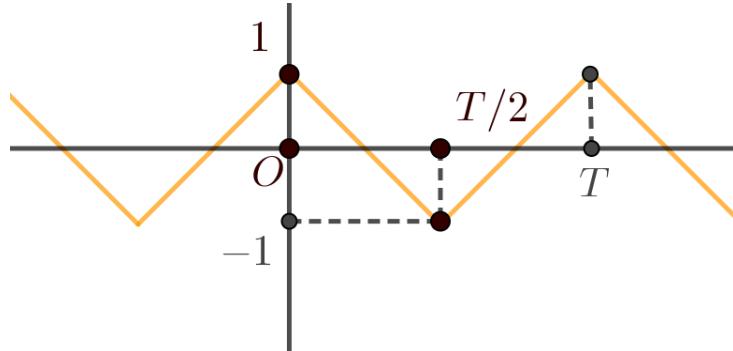
- Q13)** Calculer explicitement tous les coefficients $a_k(f)$ et $b_k(f)$ et donc $S_{2N+1}(f)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

- Q14)** A l'aide de Python tracer les fonctions $S_{2N+1}(f)$ pour $N = 1, 3, 5, 11, 49$ (retranscrire code et graphique sur la copie, on pourra prendre $T = 1$ et tracer sur $[-2, 2]$ par exemple).

- Q15)** (5/2) On admet ici que *pour cette fonction* f , pour chaque t fixé, $S_N(f)(t)$ converge bien vers $f(t)$. Pour les 5/2 : démontrer qu'il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur \mathbb{R} .

2.3.2 Exemple d'une fonction triangle

On considère la fonction T -périodique f définie par le graphe suivant.



Q16) Calculer explicitement tous les coefficients $a_k(f)$ et $b_k(f)$ et donc $S_{2N+1}(f)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Q17) A l'aide de Python tracer les fonctions $S_{2N+1}(f)$ pour $N = 1, 3, 5, 11, 49$.

Cette fois encore on peut montrer qu'il y a convergence, et plus rapide comme les graphiques le font sentir.

2.3.3 Culture : Un théorème général de convergence

Le théorème de Dirichlet qui ne sera pas un théorème de cours dit que pour les $f \in \mathcal{CM}_{T,e}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui, en outre sont \mathcal{C}^1 par morceaux (notion à définir), on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S_N(f)(t) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} f(t)$.

La démonstration de ce théorème est un classique de sujets d'écrits de concours. Ce théorème s'applique aux deux exemples précédents.

En revanche la conclusion n'est pas forcément vraie sans cette hypothèse \mathcal{C}^1 par morceau, même si f est continue par exemple : *il est faux de dire que toute fonction (même continue) T -périodique est limite de sa série de Fourier, du moins au sens de la limite point par point*. Mais la construction de fonctions contre-exemple demande aussi un peu de travail et ne sera pas abordée ici.

Pour démontrer ce théorème et un certain nombre de résultats de la théorie, et aussi la relier à la transformée de Fourier des fonctions qui ne sont plus périodiques que nous étudierons aussi plus tard, il est pertinent de remplacer cosinus et sinus par l'exponentielle complexe, ce que nous faisons rapidement au paragraphe suivant.

3 Les coefficients de Fourier complexes

Définition – Pour $f \in \mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(u) e^{-in\omega u} du$$

Q18) Soit $n \in \mathbb{N}$ exprimer $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$ et fonction de $a_n(f)$ et $b_n(f)$. Montrer ensuite que

$$S_N(f) : t \mapsto \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^N a_k(f) \cos(k\omega t) + b_k(f) \sin(k\omega t)$$

s'écrit aussi :

$$S_N(f) : t \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{in\omega t} \quad (5)$$

Commençons ici la preuve du théorème de Dirichlet cité au § 2.3.3, qui consiste à remplacer $S_N(f)$ par une intégrale où apparaît f et ce qu'on appelle le *noyau de Dirichlet* qui donne lieu encore à un calcul trigonométrique fréquent et important :

Q19) Soit $f \in \mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, S_N(f)(t) = \int_0^T f(u) D_N(t-u) du = \int_0^T f(t-s) D_N(s) ds \quad (6)$$

où $D_N(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N e^{in\omega s}$ s'appelle le *noyau de Dirichlet*.

b) Montrer que si $s \in T\mathbb{Z}$ alors $D_N(s) = 2N + 1$ et sinon :

$$D_n(s) = \frac{1}{T} \frac{\sin(\frac{2N+1}{2}\omega s)}{\sin(\omega s/2)}$$

c) Tracer en Python le graphe de D_N pour $N \in \llbracket 1, 7 \rrbracket$, pour $t \in [-T/2, T/2]$.

La concentration de D_N autour de 0 montrée par les graphes d'une part et la formule (6) d'autre part permettent de penser qu'en effet l'intégrale dans (6) va se concentrer sur la valeur $f(t)$ quand $N \rightarrow +\infty$ ce qui démontrerait le théorème de Dirichlet mais la suite de la preuve dépasse le cadre de ce D.M, notamment le fait que D_N ne soit pas de signe constant complique le raisonnement.

4 Bonus facultatif sur le mot « polynôme trigonométrique »

Dans ce paragraphe seulement, pour simplifier les notations, on prend $\omega = 1$, on note $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ l'espace vectoriel engendré par $co_k : t \mapsto \cos(kt)$ et $si_k : t \mapsto \sin(kt)$.

On note $\mathbb{R}[x, y]$ l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ c'est-à-dire que l'ensemble des fonctions qui s'écrivent comme combinaison linéaire des fonctions $(x, y) \mapsto x^i y^j$ avec $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

Autrement dit les $P \in \mathbb{R}[x, y]$ sont de la forme

$$P : (x, y) \mapsto \sum_{(i, j) \in I} a_{i,j} x^i y^j$$

où I est une partie finie de \mathbb{N}^2 .

Par exemple $P : (x, y) \mapsto x^2 + 13xy^4 + 5x^3y^2$.

On note alors \mathcal{Q} l'ensemble des fonctions $t \mapsto P(\cos(t), \sin(t))$ pour $P \in \mathbb{R}[x, y]$.

Par exemple $(t \mapsto \cos^2(t) + 13\cos(t)\sin^4(t) + 5\cos^3(t)\sin^2(t)) \in \mathcal{Q}$.

Le but de ce paragraphe est de montrer que $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$.

4.1 L'inclusion $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$: la linéarisation

Q20) Montrer que $(t \mapsto \cos^2(t)), (t \mapsto \sin(t)\cos(t)), (t \mapsto \sin^2(t))$ sont dans \mathcal{P} .

Q21) Montrer le même résultat pour $(t \mapsto \cos^3(\theta)\sin(\theta))$ grâce aux formules d'Euler

Q22) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \cos^{2p}(t)$ est dans \mathcal{P} grâce à la formule d'Euler.

On comprend qu'on peut montrer d'une manière générale avec la même technique :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad (t \mapsto \cos^i(t)\sin^j(t)) \in \mathcal{P}$$

ce qui montre bien que $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$.

4.2 L'inclusion $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$: la polynomialisation

Q23) A l'aide de la formule de De Moivre, montrer que co_k et si_k sont dans \mathcal{Q} pour tout $k \in \mathbb{N}$ et conclure que $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$.

Remarque : comme $\forall t \in \mathbb{R}, \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ la famille des fonctions $(t \mapsto \cos^i(t)\sin^j(t))_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ n'est pas libre. C'est une famille génératrice de $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$ mais pas une base.