

1-3) $\omega_0 = \frac{\varepsilon^* - \varepsilon_1}{\hbar}$ $\rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$ La distribution est **invariante par rotation** suivant θ et φ : la **norme** du champ ne dépend que de r . Tous les plans contenant \overrightarrow{OM} sont des **plans de symétrie** pour la distribution donc des plans de symétrie pour le champ : $\vec{E}(M)$ appartient à tous ces plans, il est donc dirigé suivant \vec{e}_r .

4 & 5) On choisit comme surface de Gauss la sphère centrée en O et de rayon r : $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = 4\pi r^2 E(r)$
 La charge intérieure est $\rho \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0} \rightarrow \vec{F} = -\frac{\rho e \vec{r}}{3\varepsilon_0}$ (Force de rappel) $\rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{\rho e}{3m_e \varepsilon_0}}$

6 & 7) $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{r} = \vec{0} \rightarrow \vec{r} = -\frac{V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \vec{e}_z \rightarrow \vec{p} = e\overrightarrow{MO} = \frac{eV_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \vec{e}_z$

8) $\omega_0 \sim 10^{16} \text{ rad.s}^{-1} \rightarrow \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} \sim 10^{-7} \text{ m}$ **Proche U.V.**

9) Par conservation énergétique, le rayonnement s'accompagne d'une **diminution** de l'énergie mécanique.

10 & 11) $\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\vec{p}}{dt} + \omega_0^2 \vec{p} = \vec{0} \rightarrow \vec{p}(t) = \frac{eV_0}{\omega_0} \vec{e}_z e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin(\omega_0 t)$ $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 r_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \sin^2(\omega_0 t)$

12) $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m_e r_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-\frac{1}{2\tau} \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \cos(\omega_0 t) \right)^2 \sim \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 r_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos^2(\omega_0 t)$

13) $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2e^2} m_e \omega_0^2 p_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$ Amortissement de durée caractéristique τ

14) Il est question ici de la **méthode d'Euler** explicite. On note $x_n = r(t_n)$, $v_n = \frac{dr}{dt}(t_n)$ et $a_n = \frac{d^2r}{dt^2}(t_n)$
 $\rightarrow x_{n+1} = x_n + v_n T_e$ et $v_{n+1} = v_n + a_n T_e$ avec $T_e = h = \frac{T}{N} \ll \frac{2\pi}{\omega_0}$

Les dérivées sont assimilées à des taux de variation.

15) Successivement, le triplet (x, v, a) vaut (0, 1, -0.06), (50, -2, -0.06), (-50, -5, ...), (-300, ..., ...)
 L'instruction "euler(3,0,1)" retourne [50, -50, -300].

16) Nous mettons en place **un compteur** :

```

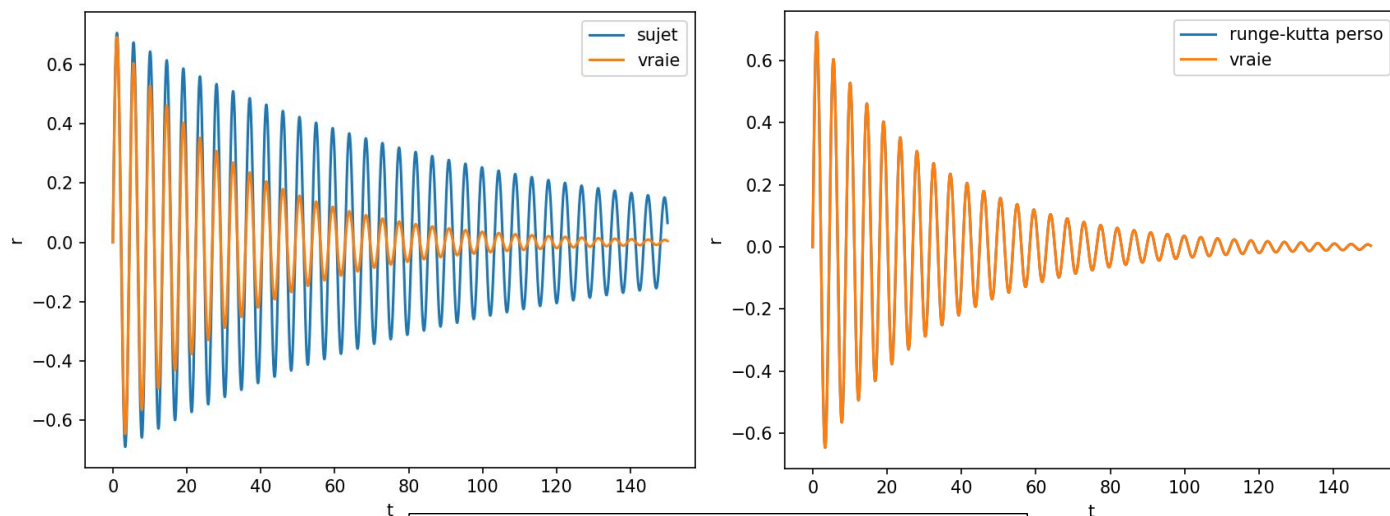
i = 0
while i < N:
    ...
    i += 1
return tab_1
    
```

[Il est étonnant de constater que le premier terme de la liste tab_1 n'est pas la condition initiale mais 50. On peut éviter cela en initialisant le compteur à 1.]

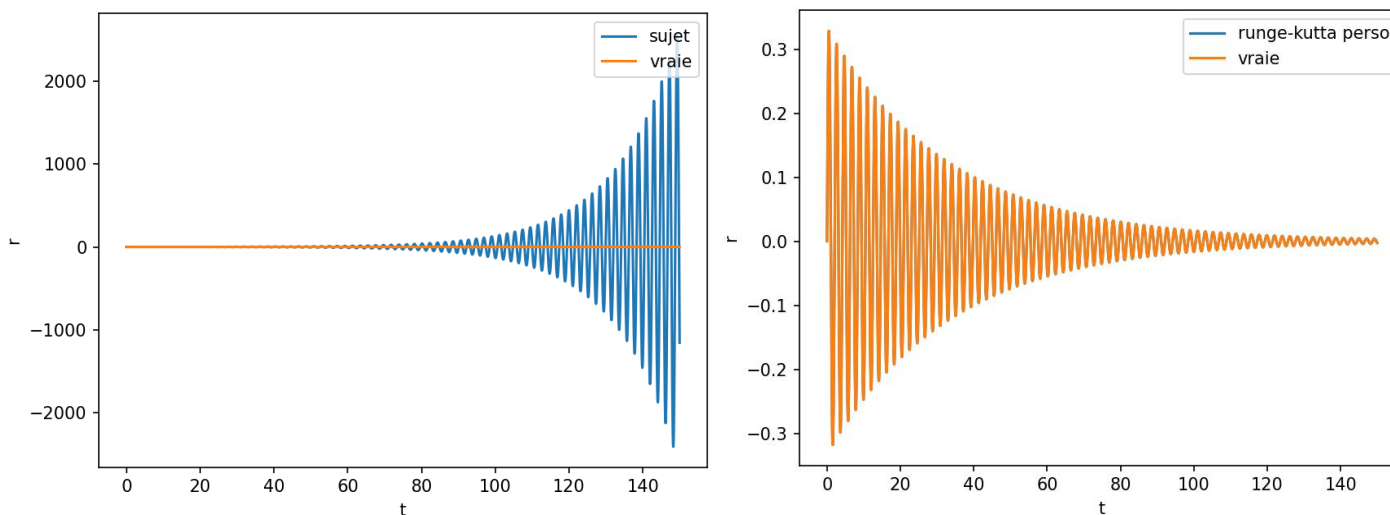
17) L'oscillateur étant peu amorti ($w_0^2 \gg \lambda^2$), on peut assimiler la pseudo période $\left(\frac{40}{19} UA\right)$ à la période propre $\frac{2\pi}{\omega_0} \rightarrow \omega_0 = \frac{19\pi}{20} \rightarrow \text{omega} = 19 * \text{np.pi}/20$ Vraisemblablement, **omega = 3**

18) La méthode d'Euler proposée **ne semble pas satisfaisante**. Le décrément logarithmique $\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{r(t)}{r(t+nT^*)}\right) = \lambda T^*$ avec T^* la pseudo période, nous permet d'être plus précis et confirme cette impression : $\delta_{euler} = \frac{1}{15} \ln(2) = 0,046$ $\lambda T_{euler}^* = 0,14$ $\delta_{réel} = \frac{1}{11} \ln(2) = 0,063$ $\lambda T_{réel}^* = 0,063$

[Ceci est dû à un facteur de qualité $Q = \omega_0/2\lambda$ trop grand. Dans ce cas, la résolution est imparfaite voire même instable si Q devient beaucoup trop grand : il suffit de tester le programme avec la valeur de $\omega_0 = 3$ correspondant au tracé de la solution vraie pour s'en rendre compte. Une amélioration est possible avec la méthode de Runge-Kutta utilisant le point milieu. Un programme en ligne illustre cela.]



$$\omega_0 = 1,4 \text{ UA} \quad \lambda = 0,03 \text{ UA} \quad Q = 23$$



$$\omega_0 = 3 \text{ UA} \quad \lambda = 0,03 \text{ UA} \quad Q = 50$$

19) On étudie le rayonnement de Rayleigh (le seul au programme !) pour lequel l'approximation des régimes quasi stationnaires est vérifiée au sein de la distribution : $a \ll \lambda$

De plus, on se place dans la zone de rayonnement, c'est-à-dire $\lambda \ll r$.

Le temps de propagation est très grand devant la période du signal (anti A.R.Q.S. !)

20) Le plan (xy) , en d'autres termes le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$, est un plan d'antisymétrie pour la distribution donc le champ électrique sur ce plan est suivant \vec{e}_θ .

Les plans méridiens, en d'autres termes les plans $\varphi = cste$, sont des plans de symétrie pour la distribution donc le champ magnétique sur ces plans est suivant \vec{e}_φ .

Enfin, le champ électrique a la même dimension que le produit du champ magnétique avec une vitesse.

$$\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin \theta \ddot{p}(t - \frac{r}{c})}{4\pi r} \vec{e}_\theta \quad \vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin \theta \dot{p}(t - \frac{r}{c})}{4\pi r c} \vec{e}_\varphi$$

$$21-23) \vec{\Pi} = \frac{\mu_0 p_m^2 \omega_0^4 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c r^2} \sin^2 \left[\omega_0 \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \vec{e}_r \rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\mu_0 p_m^2 \omega_0^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 c r^2} \vec{e}_r$$

$$\rightarrow \Phi_{ray} = \frac{\mu_0 p_m^2 \omega_0^4}{32\pi^2 c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \quad \Phi_{ray} = \frac{p_m^2 \omega_0^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3} \mathcal{E}_m \quad (\text{Sans l'exponentielle})$$

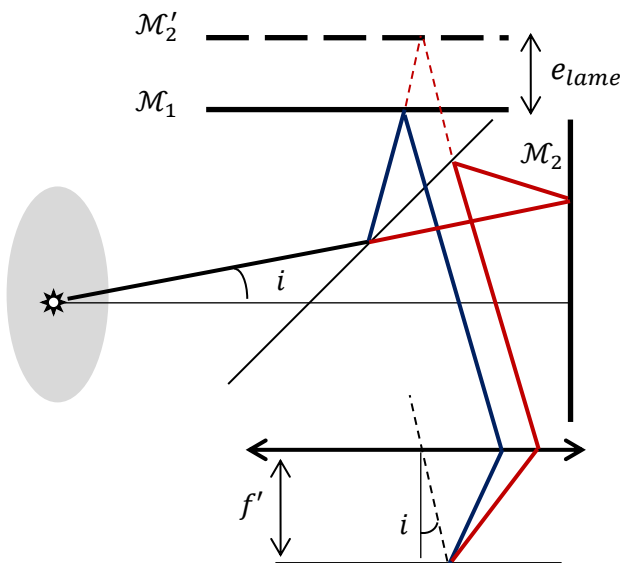
$$24) \mathcal{E}_{ray} = \hbar \omega_0 \sim \Phi_{ray} \tau_c \rightarrow \tau_c \sim \frac{6\hbar \epsilon_0 c^3}{p_m^2 \omega_0^3} \sim \frac{6\hbar \epsilon_0 c^3}{e^2 a^2 \omega_0^3} \sim 1 \text{ ns} \quad (\text{Entre un laser et une lampe spectrale})$$

$$25 \& 26) \delta \mathcal{E}_m = -\Phi_{ray} \delta t = -\gamma \mathcal{E}_m \delta t \quad \text{En passant à la limite, } \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} + \gamma \mathcal{E}_m = 0$$

A partir de maintenant, $\omega_0 \sim 3 \cdot 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ car la raie est dans le visible : $\tau = \frac{1}{\gamma} \sim 2 \cdot 10^{-8} \text{ s} \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$27) \tau_c \sim 5\tau \sim 10^{-7} \text{ s} \rightarrow \Delta\nu = \frac{1}{\tau_c} \sim 10^7 \text{ Hz} \quad \text{Elargissement naturel (Voir fin du sujet !)}$$

28 & 29) Le miroir \mathcal{M}_1 et le symétrique de \mathcal{M}_2 par rapport à S_p forme une lame d'air équivalente.



$$\delta = 2e_{lame} \cos i \quad \text{Voir cours !}$$

[Pour le calcul de la différence de marche, vous devez connaître parfaitement les deux techniques de calcul présentées page 20 du cours "Interférences lumineuses à deux ondes". Si vous avez le choix, privilégiez la méthode avec S'_1 et S'_2 , tout en haut, hors figure ici !]

$$I(i) = \frac{I_{max}}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi \delta(i)}{\lambda_0} \right) \right)$$

On observe des **cercles concentriques** car l'intensité ne dépend que de l'angle i .

30) Deux radiations de fréquences ν et ν' différentes ne peuvent interférer. L'intensité résultant de cette superposition est la somme des intensités $I(\nu)$ et $I(\nu')$. Si au voisinage d'un même angle i , l'une est maximale et l'autre minimale, les franges disparaissent.

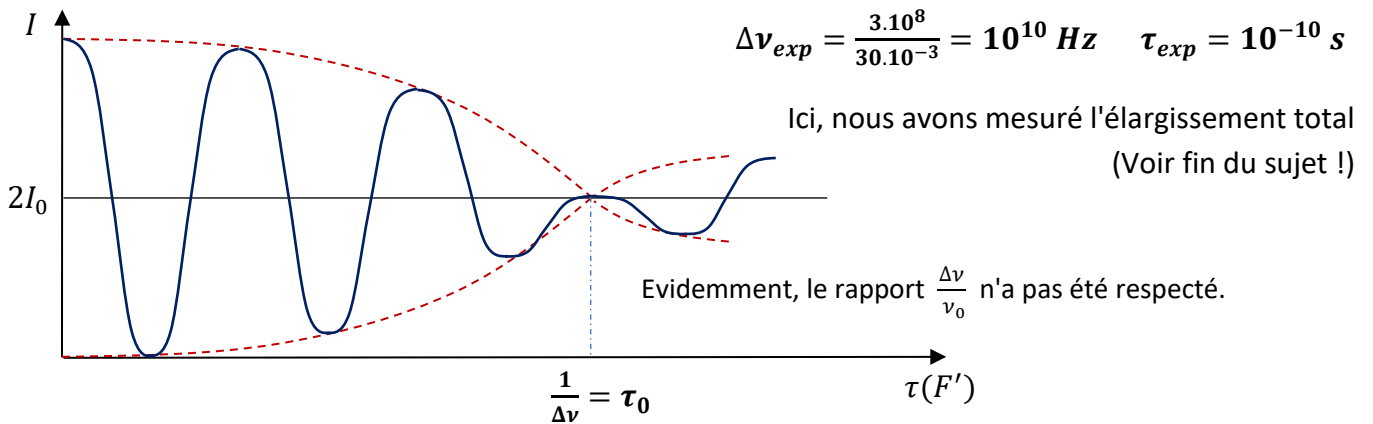
$$\Delta p = \delta \Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{\delta \Delta \nu}{2c} = \frac{e_{lame} \Delta \nu}{c} \quad \text{en } F'$$

31) Il y a brouillage si le décalage d'ordre vaut $\frac{1}{2}$ (maximum-minimum !) donc $e_{lim} = \frac{c}{2\Delta\nu}$

32) $dI(F') = 2 \frac{I\nu(\nu)}{4} d\nu [1 + \cos(2\pi\nu\tau(F'))]$ $\tau(F')$ est le **retard temporel** $p(F') = \nu\tau(F')$

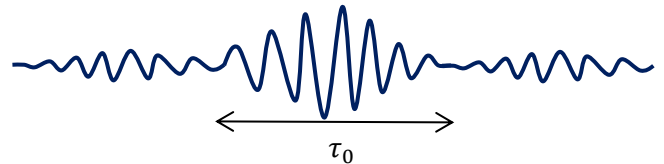
33-35) On somme les dI (incohérence) : $I(F') = \frac{I_0}{2} + \frac{I_{vm}}{2} \int_{\nu_0-\Delta\nu/2}^{\nu_0+\Delta\nu/2} \cos(2\pi\nu\tau(F')) d\nu$ **Erreur d'énoncé**
 $= \frac{I_0}{2} + \frac{I_{vm}}{4\pi\tau(F')} [\sin(2\pi\nu\tau(F'))]_{\nu_0-\Delta\nu/2}^{\nu_0+\Delta\nu/2} = \frac{I_0}{2} [1 + \text{sinc}(\pi\Delta\nu\tau(F')) \cos(2\pi\nu_0\tau(F'))]$

[Cette partie correspond à l'exercice 3.3 du TD "Optique ondulatoire"]



Si l'écart temporel atteint la durée d'un train d'onde, **la superposition n'est plus possible** : incohérence !

Attention ! Dans ce modèle à profil rectangulaire, τ_0 n'est que la durée de la partie centrale du train d'onde, c'est pour cela que les franges réapparaissent légèrement au-delà !



36-38) $t_1 = \frac{d}{c}$ Le deuxième maximum est émis en $t = T_0 \rightarrow t_2 = T_0 + \frac{d-V_x T_0}{c} \rightarrow \nu = \frac{1}{t_2-t_1} = \frac{\nu_0}{1-V_x/c} \dots$

39) Le spectre énergétique est **discret** (états liés) car les atomes sont confinés. $m^* \sim 3 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$

40 & 41) $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2m^*}{\hbar^2} \mathcal{E} \varphi(x) = 0$ $\varphi(0) = \varphi(L) = 0 \rightarrow \varphi(x) = A \sin\left(\sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2} \mathcal{E}_n} x\right)$ avec $\mathcal{E}_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m^* L^2}$

42) $n_1 \sim 10^{21} \rightarrow \frac{\mathcal{E}_{n_1+1} - \mathcal{E}_{n_1}}{\mathcal{E}_{n_1}} = \left(1 + \frac{1}{n_1}\right)^2 - 1 \sim \frac{2}{n_1} \sim 10^{-21}$ Le caractère discret n'est plus détectable.

43-46) $n(\mathcal{E}) = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_1}} \rightarrow dn = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{E}_1}} d\mathcal{E}$ $\mathcal{P}(\mathcal{E}) \propto \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}\right) \rightarrow f(\mathcal{E}) \propto \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}\right)$

47) Doit-on répondre ? Vous si, moi non ! $f(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\pi k_B T_{gaz}}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T_{gaz}}\right)$

$$48) \langle \mathcal{E} \rangle = \langle \mathcal{E}_c \rangle = \langle \frac{1}{2} m^* v_x^2 \rangle = \int_0^\infty \mathcal{E} f(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \frac{1}{2} k_B T_{gaz}$$

Théorème d'équipartition de l'énergie en mécanique classique

Si l'énergie contient plusieurs termes **quadratiques**, la valeur moyenne de chaque terme est identique.

Chaque degré de liberté à énergie quadratique contribue à l'énergie moyenne à hauteur de $\frac{k_B T}{2}$.

[Attention ! Ne pas confondre cette équipartition énergétique avec celle de population si $T \gg T_{gel}$.]

$$u = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{k_B T_{gaz}}{m^*}} \sim 2 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$49) \nu_+ = \frac{\nu_0}{1-u/c} \quad \nu_- = \frac{\nu_0}{1+u/c} \quad \Delta\nu_{DOP} = 2\nu_0 \frac{u}{c} \sim 10^{10} \text{ Hz} \sim \Delta\nu_{exp} \gg \Delta\nu_{naturel} (\text{x1000})$$

En effet, l'élargissement Doppler est beaucoup plus influent que l'élargissement naturel (.ripoll®)