

1-2) Les équations de Maxwell sont composées de deux équations de liaisons aux sources (1) & (2) et de deux équations intrinsèques de structure (3) & (4) :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (1) \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(M, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3) \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\Delta \vec{E} \rightarrow \Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} \rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

3) On reconnaît l'écriture d'une onde **polarisée selon y** et se propageant dans **le sens des x croissants**. Injectée dans l'équation de d'Alembert, elle en est une solution si $\omega = kc$.

4) Un conducteur est un milieu dans lequel la loi d'Ohm locale est vérifiée ($\vec{j} = \gamma \vec{E}$ avec γ , la conductivité). Le modèle de conducteur parfait s'appuie sur **une conductivité infinie** et un courant fini, ainsi $\vec{E} = \vec{0}$.

On peut aussi faire référence à l'épaisseur de peau $\sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ qui tend vers 0 et donc conclure que $\vec{E} = \vec{0}$.

5) On note milieu 1 le vide et milieu 2 le conducteur parfait. L'onde incidente **ne vérifie pas** la relation (I.2) qui impose la condition $\vec{E}_1 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$ alors que \vec{E}_i est selon \vec{u}_y .

On a plutôt $E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y + \vec{E}_{0r} \cos(\omega' t) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x \quad \forall t \rightarrow \omega' = \omega, \vec{k}' = \vec{k}, \vec{E}_{0r} = -E_0 \vec{u}_y$ (et $\sigma = 0$)

Cette onde réfléchie est **polarisée selon y** et se propage dans **le sens des x décroissants**.

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{u}_y \quad \vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_i}{c} - \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{u}_z$$

On reconnaît une onde **stationnaire** qui ne se propage pas.

$$\mathbf{7) } U \propto \sin^2(kx) \quad \text{Deux nœuds consécutifs de } U \text{ sont distants de } \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f}$$

$$\text{On mesure } L = 5,5 \text{ cm pour 4 périodes de longueur } \frac{\lambda}{2} \text{ donc } \frac{\lambda}{2} = \frac{5,5 \cdot 10^{-2}}{4} \text{ m} \rightarrow f = \mathbf{10,9 \text{ GHz}}$$

$$\mathbf{8) } \text{L'incertitude-type de lecture (résolution) sur } L \text{ est } u(L) = \sqrt{2} u(d) = \sqrt{2} \frac{5 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{3}} \text{ m} = 4,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\text{Or } \frac{u(f)}{f} = \frac{u(L)}{L} \rightarrow u(f) = 0,08 \text{ GHz} \rightarrow E_N = \frac{|11,0 - 10,9|}{\sqrt{(0,08)^2 + (0,6)^2}} = \mathbf{0,17 < 2} \quad \text{La mesure est acceptée.}$$

9) Ce montage rappelle l'**interféromètre de Michelson** : S joue le rôle de la **lame semi réfléchissante séparatrice**, elle crée une onde réfléchie et une onde transmise en divisant l'amplitude de l'onde incidente. Elle agit une première fois sur l'onde en provenance de E puis sur celles en provenance de P₁ et P₂ qui jouent les rôles **des miroirs** du Michelson. Ainsi en R, on observe la superposition de l'onde ayant parcouru le chemin S - P₁ - S - R (\vec{E}_1) et celle ayant suivi le chemin S - P₂ - S - R (\vec{E}_2).

10) Il est question ici de la démonstration de la formule de Fresnel. Procédons ici dans \mathbb{R} :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_1(M, t) + \vec{E}_2(M, t) = E_{01} \vec{u}_y \cos(\Phi_1(M, t)) + E_{02} \vec{u}_y \cos(\Phi_2(M, t))$$

$$U(M) = K \langle E^2(M, t) \rangle = \frac{K}{2} (E_{01}^2 + E_{02}^2 + 4E_{01}E_{02} \langle \cos(\Phi_1(M, t)) \cos(\Phi_2(M, t)) \rangle)$$

$$= \frac{K}{2} (E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}(\cos \Delta\Phi)) \quad \text{Avec } \Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2(OP_2 - OP_1) = \frac{4\pi f}{c} (x - OP_1)$$

On relève 3 périodes sur un intervalle $\Delta x = 4,0 \text{ cm} \rightarrow \frac{c}{2f} = \frac{\Delta x}{3} \rightarrow f = \mathbf{11 \text{ GHz}}$

11) Le contraste est par définition $\frac{U_{max} - U_{min}}{U_{max} + U_{min}} \sim \frac{1}{2}$

Il est inférieur à 1 car le **pouvoir de réflexion de S n'est pas égal à 50 %**.

En d'autres termes, cela signifie que $E_{01} \neq E_{02} : \frac{2E_{01}E_{02}}{E_{01}^2 + E_{02}^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{E_{01}}{E_{02}} + \frac{E_{02}}{E_{01}} = 4 \rightarrow \frac{E_{01}}{E_{02}} = \mathbf{2 \pm \sqrt{3}}$

12) $\vec{B}_1 = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_z = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_x \rightarrow \vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{u}_y$ Ce courant, en toute logique, est selon \vec{u}_y car il est créé par le champ électrique incident. Il est à l'origine de l'onde réfléchie.

13) La projection de \vec{E} selon la direction des barreaux est à la source des courants qui s'établissent. Mais l'effet joule absorbe l'énergie électromagnétique et cette composante de \vec{E} s'atténue au cours de la traversée jusqu'à quasiment s'annuler en sortie : **La grille polarise l'onde selon la direction orthogonale aux barreaux**. Ainsi en $x > 0$, dans le cas n°1 **il n'y a plus d'onde**, dans le cas n°2 **l'onde ressort telle quelle** et dans le cas n°3 **l'onde est polarisée à 45° entre (Oy) et (Oz)**.

14) En optique, les polariseurs à base de longues chaînes de polymères œuvrent de la même façon.

15) Les radiotélescopes sont formés d'un collecteur parabolique qui concentre les ondes radio vers le foyer où se situe le détecteur. La longueur d'onde étant de l'ordre du mètre, le collecteur est souvent constitué de **grillages métalliques**, dont le maillage doit seulement être inférieur à la longueur d'onde. Afin de détecter le maximum de puissance, la surface totale du collecteur est égale à plusieurs centaines de mètres carrés. Au-delà d'une certaine taille, il est nécessaire de fragmenter le collecteur en de **multiples antennes réceptrices mobiles** montées sur rails pour lesquelles l'orientation est plus facile.

Le radiotélescope de Nançay (Cher – France) est un compromis entre collecteur fixe et mobile : un grand collecteur plan inclinable recueille les ondes qui après réflexions, convergent vers le foyer disposé sur un chariot qui se déplace en fonction de la trajectoire de la source dans l'espace.

16) $\text{div } \vec{E} = 0 \rightarrow \rho = 0$ La densité d'électrons est **uniforme** ($n_e = n_c = n$).

17) On applique la 2^{ème} loi de Newton à un électron : $im\omega \vec{v} = -e\vec{E}$ Or $\vec{j} = -ne e\vec{v}$ donc $\underline{\theta}_B = \frac{ne^2}{im\omega}$

18) D'après les équations de Maxwell, on obtient l'équation d'onde :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\Delta \vec{E} \rightarrow \Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \underline{\theta}_B \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \rightarrow \Delta \vec{E} - \mu_0 \underline{\theta}_B \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On y injecte la forme d'onde proposée : $-\underline{k}^2 - i\omega \mu_0 \underline{\theta}_B + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \rightarrow \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ne^2/m\epsilon_0}{c^2}$

19-20) L'onde se propage si \underline{k} est réel donc si $\omega > \omega_p$ $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{\omega/k} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$

21) La vitesse de groupe n'est pas constante. En effet, la densité électronique évolue au cours du trajet.

22) $t(\infty) = \frac{L}{c}$ C'est le temps de parcours de l'onde dans le vide.

23) $\tau(\omega) > 0$ C'est le retard entre l'onde réelle et l'onde qui se propagerait dans le vide.

$$24) \omega_p = 6.10^2 \text{ rad. s}^{-1} \ll \omega \rightarrow \frac{1}{v_g} = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right) \quad \tau(f) = \int_0^L \left(\frac{1}{v_g(f)} - \frac{1}{c} \right) dl = \frac{e^2/m\epsilon_0}{8\pi^2 c f^2} \int_0^L n_e dl$$

$$25) A = \frac{e^2}{8\pi^2 m \epsilon_0 c} = 1,34.10^{-7} \text{ m}^2. \text{s}^{-1}$$

26-28) Sur la figure, l'abscisse est une date, pas un retard ! Or une différence de dates correspond à une différence de retard vis-à-vis de l'onde qui se propagerait dans le vide, c'est-à-dire à une différence de τ ! En d'autres termes, **l'abscisse représente $t_0 + \tau$ et l'allure décroissante** est en accord avec la relation. Dans le tableau suivant, on consigne quelques dates d'arrivées en fonction de la fréquence.

t (s)	0,20	0,30	0,40	0,50
f (GHz)	1,48	1,39	1,32	1,26

Ainsi, on peut établir un deuxième tableau plus instructif en lien avec la relation $\Delta t = A DM \Delta(1/f^2)$

$\Delta t = \Delta \tau$ (s)	0,10	0,10	0,10	0,30
$\Delta(1/f^2)$ (s ²)	$6,1.10^{-20}$	$5,6.10^{-20}$	$5,6.10^{-20}$	$1,7.10^{-19}$

Le produit $A DM$ est de l'ordre de $1,7.10^{18} \text{ s}^{-1}$

$\rightarrow DM = 1,3.10^{25} \text{ m}^{-2} = 4,2.10^2 \text{ pc. cm}^{-3}$ L'origine extragalactique des péritios n'est pas à exclure.

$$29) \text{ D'après les relations de passage, } \begin{cases} E_x(x, b, z, t) = 0 \quad \forall x, z \text{ et } t \\ E_x(x, y, d, t) = 0 \quad \forall x, y \text{ et } t \\ E_y(a, y, z, t) = 0 \quad \forall y, z \text{ et } t \end{cases} \dots \rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a} \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad k_z = \frac{l\pi}{d}$$

$$30) \text{ Le champ } \vec{E} \text{ vérifie l'équation de d'Alembert donc } k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \rightarrow f_{mnl} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{l^2}{d^2}}$$

31) Ces figures nous permettent de visualiser la répartition dans l'espace de la valeur moyenne de E^2 . Le centre d'une tache sombre est un ventre de \vec{E} et les distances séparant deux ventres successifs selon x, y et z sont respectivement $\frac{a}{m}, \frac{b}{n}$ et $\frac{d}{l}$. On en déduit que le triplet est **(3, 2, 3)** ($f_{323} = 2,45 \text{ GHz}$)

$$\vec{E}_{323}(x, y, z, t) = \begin{cases} E_1 \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{3\pi z}{d}\right) \cos(\omega t) \\ E_2 \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{3\pi z}{d}\right) \cos(\omega t) \\ E_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{3\pi z}{d}\right) \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\vec{E}_{323}\left(\frac{a}{2}, 0, z, t\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_2 \sin\left(\frac{3\pi z}{d}\right) \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{E}_{323}\left(\frac{a}{2}, y, 0, t\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -E_3 \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \cos(\omega t) \end{pmatrix} \rightarrow E_3 = 0$$

En $y = 0$, on observe bien les variations de $\sin^2\left(\frac{3\pi z}{d}\right)$ avec trois maximums entre 0 et d ($\frac{d}{6}; \frac{d}{2}; \frac{5d}{6}$)

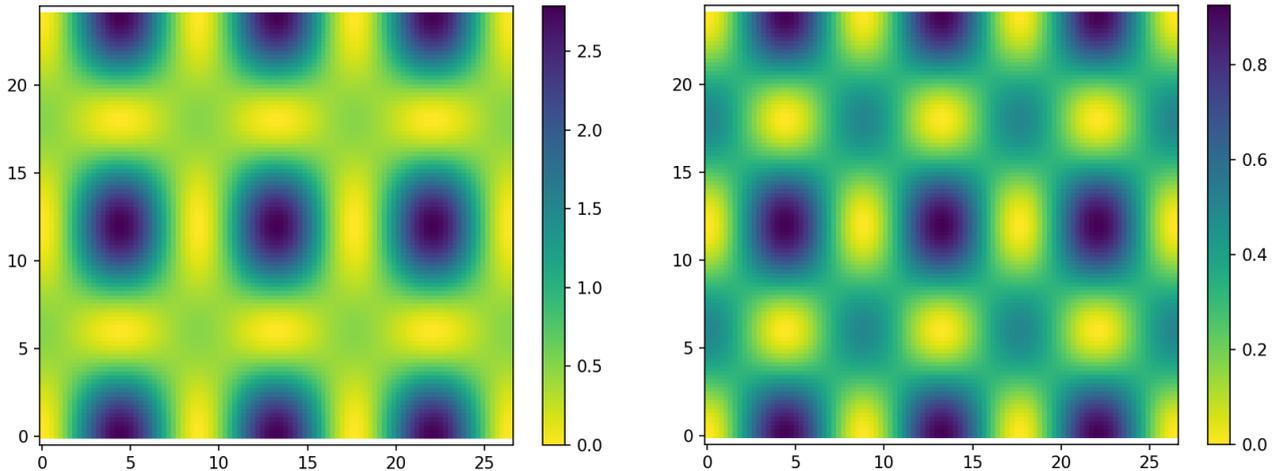
En $z = 0$, nous observons peu de variation de $\langle E^2 \rangle$ ce qui laisse penser que $E_3^2 < E_2^2$ (et non $E_3 = 0$)

De même, l'analyse en $z = \frac{d}{2}$ et $x = 0$ (figure 8.c) conduirait à la conclusion que $E_1^2 < E_2^2$ (et non $E_1 = 0$)

Il faut éviter de conclure que $E_3 = 0$ et $E_1 = 0$ car d'après $\text{div } \vec{E} = 0 \rightarrow \frac{3}{a} E_1 + \frac{2}{b} E_2 + \frac{3}{d} E_3 = 0$

$$\rightarrow E_2 = -\frac{3b}{2} \left(\frac{E_1}{a} + \frac{E_3}{d} \right) = -E_1 - 1,36 E_3$$

Voici deux représentations de $\langle E^2 \rangle$ dans le plan $x = \frac{a}{2}$. L'une avec $E_1 = E_3 = 1 \rightarrow E_2 = -2,36$ (figure de gauche analogue à la figure 8.b), l'autre avec $E_1 = 0$ (figure de droite plus éloignée de la 8.b)



Ultime remarque sur cette partie du sujet passionnante : La présence des cosinus s'explique par la continuité de \vec{B}_N sur les surfaces. En effet, à partir de l'équation de Maxwell-Faraday, on peut établir que

$$\vec{B}_{323}(x, y, z, t) = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega} \left(\frac{3E_2}{d} - \frac{2E_3}{b} \right) \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{3\pi z}{d}\right) \sin(\omega t) \\ \frac{3\pi}{\omega} \left(\frac{E_3}{a} - \frac{E_1}{d} \right) \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{3\pi z}{d}\right) \sin(\omega t) \\ \frac{\pi}{\omega} \left(\frac{2E_1}{b} - \frac{3E_2}{a} \right) \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{3\pi z}{d}\right) \sin(\omega t) \end{cases}$$

Et vérifier que $(\vec{B}_{323}(0, y, z, t))_x = (\vec{B}_{323}(a, y, z, t))_x = (\vec{B}_{323}(x, 0, z, t))_y = (\vec{B}_{323}(x, b, z, t))_y = \dots = 0$

32) On utilise une équation de Maxwell (Maxwell-Faraday de préférence) et surtout pas la relation du trièdre, l'onde n'étant pas progressive ! $-\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \rightarrow \vec{B} = \frac{n\pi E_0}{\underbrace{a\omega}_{B_0 = E_0/c}} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_z$

33) $W = \frac{S}{2} \int_0^a \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) dx = \frac{Sa}{4} \left(\varepsilon_0 c^2 B_0^2 \sin^2(\omega t) + \frac{B_0^2}{\mu_0} \cos^2(\omega t) \right) = \frac{SaB_0^2}{4\mu_0}$ L'énergie est **constante**.

34) L'équation devient $\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\sigma \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \sim \mu_0 \sigma \vec{E}$ car $\varepsilon_0 \omega = 6,8 \cdot 10^{-2} S \cdot m^{-1} \ll \sigma$

35) $\overrightarrow{rot} \overrightarrow{rot} \vec{B} = -\vec{\Delta} \vec{B} \rightarrow \vec{\Delta} \vec{B} = -\mu_0 \sigma \overrightarrow{rot} \vec{E} \rightarrow \vec{\Delta} \vec{B} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$

On reconnaît l'équation de la diffusion rencontrée par ailleurs en thermodynamique (diffusion thermique) et en dynamique quantique (équation de Schrödinger). **La dérivée première dans le temps** témoigne de son caractère irréversible (elle est sensible au changement de variable $t \rightarrow t' = -t$)

36-37) $\underline{f}''' - i\omega\mu_0\sigma \underline{f} = 0 \rightarrow \underline{f}''' - \frac{2i}{\delta^2} \underline{f} = 0 \rightarrow \underline{f}(x) = C_1 \exp\left(-\frac{1+i}{\delta} x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1+i}{\delta} x\right)$

Le deuxième terme est écarté à cause de sa limite infinie en $x \rightarrow +\infty$.

En définitive, $\vec{B} = B_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \vec{u}_z$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$ **Épaisseur de peau**

Le champ **se propage tout en s'atténuant**. Au-delà de quelques δ , son amplitude est négligeable.

$$38-39) p_J = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 = \frac{1}{\mu_0^2 \sigma} (\text{rot } \vec{B})^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \sigma \delta^2} \exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right) \left(\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)^2$$

$$\text{Ainsi, } \langle p_J \rangle = \frac{B_0^2 \omega}{2\mu_0} \exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right) \rightarrow P_J = \frac{B_0^2 \omega S}{\mu_0} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right) dx = \frac{B_0^2 \omega S \delta}{2\mu_0}$$

$$[\text{Variante du calcul de } \langle p_J \rangle \text{ dans } \mathbb{C}: \langle p_J \rangle = \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma} (\text{rot } \vec{B}) \cdot (\text{rot } \vec{B})^* \text{ avec } \vec{B} = B_0 \exp\left(i\omega t - \frac{1+i}{\delta} x\right) \vec{u}_z]$$

$$40-43) Q = 2\pi \frac{W}{P_{JT}} = \omega \frac{W}{P_J} = \frac{a}{2\delta} = 2,2 \cdot 10^4 \gg 1 \quad \text{On peut donc écrire que } \frac{dW}{dt} \sim -P_J = -\frac{\omega}{Q} W(t)$$

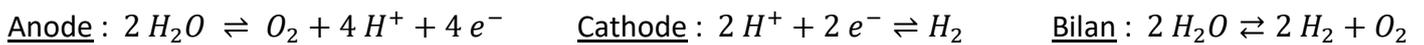
$$\text{On a bien } W(t) = W_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } \tau = \frac{Q}{\omega} = 1,4 \mu$$

Dans le cadre de cette modélisation, la durée pendant laquelle l'onde persiste après l'ouverture de la porte semble un peu trop courte pour expliquer les pèritios ...

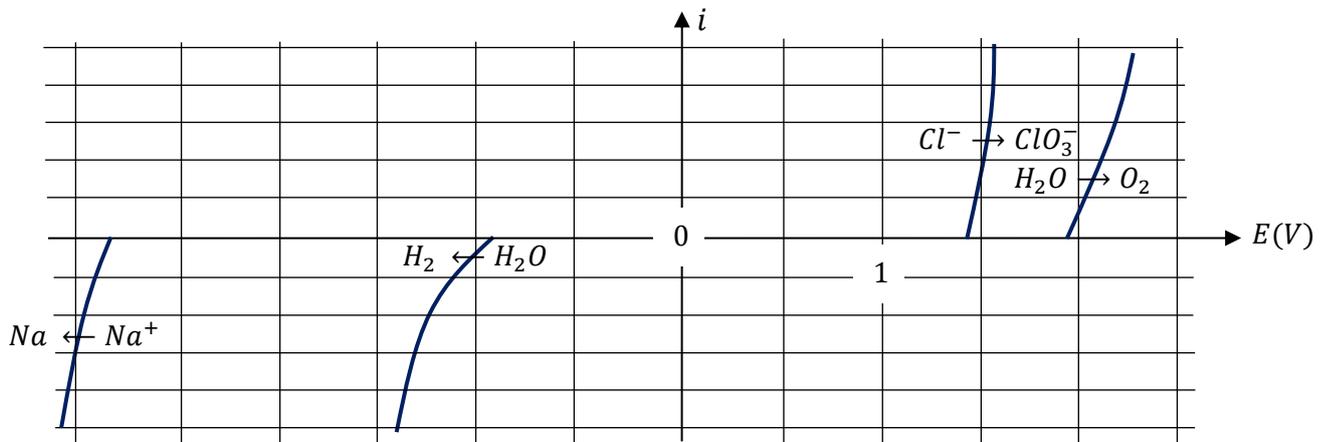
44)  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$ Le potassium appartient à la famille des **alcalins**.

En cédant son électron périphérique $4s^1$, il possède la structure électronique de l'argon : **n. o. = I**

45) D'après les potentiels standards, on devrait observer l'électrolyse de l'eau.



46) En réalité, le phénomène de **surtension anodique** inverse l'ordre des potentiels des couples O_2/H_2O et ClO_3^-/Cl^- . Ainsi, c'est l'oxydation de Cl^- qui est observée à l'anode. A la cathode, rien n'est modifié.



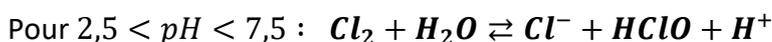
47) Les n. o. du chlore dans Cl^- , Cl_2 , $HClO$ et ClO^- sont respectivement $-I$, 0 , I et I .

L'acide du couple $HClO/ClO^-$ est $HClO$ donc finalement **A = Cl^-** , **B = Cl_2** , **C = $HClO$** et **D = ClO^-** .

48) On lit sur le diagramme $E(Cl_2/Cl^-) = 1,42 V$

$$\text{Or } E(Cl_2/Cl^-) = 1,36 + 0,03 \log\left(\frac{1}{c_0^2}\right) \rightarrow c_0 = 10^{-1} \text{ mol. L}^{-1}$$

49) Le dichlore est **instable** au-dessus de $pH = 2,5$ et **se dismute**.



50) On assiste à la **dismutation** des ions ClO^- car leurs domaines de prédominance sont **disjoints**.

$$3 ClO^- \rightleftharpoons 2 Cl^- + ClO_3^- \quad K = 10^{\frac{4(1,73 - 1,32)}{0,06}} = 10^{27}$$

51) La réaction étant **exothermique** ($\Delta_r H^0 = -41,3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$), elle est favorisée à basse température.

52) $\Delta_r G^0(T) = -41,3 \cdot 10^3 + 121,7 T \text{ (J} \cdot \text{mol}^{-1})$ $K_p(T) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0(T)}{RT}\right)$ $s(T) = \sqrt{\frac{1}{K_p(T)}}$
 $\rightarrow s(T) = \exp\left(\frac{-2484}{T} + 7,319\right) \rightarrow s(348 \text{ K}) = 147 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ et $s(283 \text{ K}) = 28,5 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$