

3)  $n(1 - \alpha_e) \quad n\left(\sigma - \frac{\alpha_e}{2}\right) \quad n\alpha_e \quad n_{total}^{gaz} = n\left(1 + \sigma - \frac{\alpha_e}{2}\right) \quad K(T) = \frac{\alpha_e^2(1 + \sigma - \frac{\alpha_e}{2})P^0}{(1 - \alpha_e)^2(\sigma - \frac{\alpha_e}{2})P}$

4) La réaction consomme du gaz, elle est donc favorisée à **haute pression**. D'un point de vue de la vitesse de réaction, c'est plutôt une bonne chose mais le coût et les difficultés techniques atténuent ce bilan. La réaction est exothermique, elle est donc favorisée à **basse température** ce qui n'est jamais bon pour la cinétique. C'est la raison principale de l'utilisation d'un catalyseur.

5) La variance du système est égale à trois. Si on fixe  $P$  et  $T$ , on peut encore optimiser  $\alpha$  en agissant sur  $\sigma$ . A  $P$  et  $T$  fixées, la valeur de  $F(\alpha)$  est **déterminée**. On choisit donc la courbe la plus à droite ( $\sigma = 10$ ) correspondant au taux de conversion maximal du monoxyde de carbone (grand excès de dioxygène).

6 & 7)  $\frac{d\theta}{dt} = k_a p(1 - \theta) - k_d \theta$  A l'équilibre,  $\frac{d\theta}{dt} = 0 \rightarrow \theta_e = \frac{Kp}{1 + Kp}$  ( $0 < \theta_e < 1$ )

8 & 9)  $\mathcal{E}(n) = -n\mathcal{E} \quad g_n = \binom{N}{n} \quad P(n) = \frac{g_n}{Z} e^{n\beta\mathcal{E}}$

10)  $\langle n \rangle = -\frac{1}{\mathcal{E}} \langle \mathcal{E}(n) \rangle$  Or  $\langle \mathcal{E}(n) \rangle = \sum_0^N (-n\mathcal{E})P(n) = -\frac{\sum_0^N g_n n\mathcal{E} e^{n\beta\mathcal{E}}}{\sum_0^N g_n e^{n\beta\mathcal{E}}} = -\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$

11) On remarque que  $Z = \sum_0^N \binom{N}{n} e^{n\beta\mathcal{E}} = (1 + e^{\beta\mathcal{E}})^N \rightarrow \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = N \frac{\mathcal{E} e^{\beta\mathcal{E}}}{1 + e^{\beta\mathcal{E}}} \rightarrow \theta_e = \frac{\langle n \rangle}{N} = \frac{e^{\beta\mathcal{E}}}{1 + e^{\beta\mathcal{E}}} = \frac{Kp}{1 + Kp}$

12) On évalue (difficilement)  $K$  à basse pression ( $Kp \ll 1$ ) :  $\theta_e \sim Kp \rightarrow 5 \cdot 10^{-3} Pa^{-1} < K < 10^{-2} Pa^{-1}$

$(p; \theta_e)$	(5,6 ; 0,06)	(11,1 ; 0,09)	(16,7 ; 0,15)	(25,0 ; 0,17)	(38,9 ; 0,23)	(50,0 ; 0,28)	(91,7 ; 0,35)
$\theta_e/p(1 - \theta_e)$	0,011	0,0089	0,011	0,0082	0,0077	0,0078	0,0059

(La mesure (63,9 ; 0,26) est jugée aberrante)

$(p; \theta_e)$	(130,5 ; 0,43)	(266,6 ; 0,50)	(533,3 ; 0,59)	(799,9 ; 0,64)	(1066,6 ; 0,71)	(1336,0 ; 0,79)
$\theta_e/p(1 - \theta_e)$	0,0058	0,0038	0,0027	0,0022	0,0023	0,0028

La valeur de " $\theta_e/p(1 - \theta_e)$ " n'est absolument pas constante, **l'accord n'est pas bon**.

13) Le centre de la sphère est centre de symétrie du problème, le flux thermique est radial ( $\vec{j}_{th} = j_{th} \vec{e}_r$ ). D'après la loi de Fourier,  $\vec{j}_{th} = -\kappa \overrightarrow{\text{grad}} T \rightarrow T(r)$

14) On applique le premier principe (en termes de puissance) à l'**inter sphère située entre  $r$  et  $r + dr$** .

$$4\pi r^2 dr C_g \frac{\partial T}{\partial t} = 4\pi r^2 j_{th}(r) - 4\pi (r + dr)^2 j_{th}(r + dr) = -4\pi \frac{\partial(r^2 j_{th})}{\partial r} dr = 4\pi \kappa \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr$$

15 & 16)  $\frac{d(rT)}{dr} = A \rightarrow T(r) = T_0 + a \frac{T_s - T_0}{r} \rightarrow \mathcal{P}_{sph \rightarrow milieu} = -\kappa \frac{dT}{dr} 4\pi r^2 = 4\pi a \kappa (T_s - T_0)$

17) On applique le premier principe (en termes de puissance) à la nano sphère :

$$\frac{4}{3} \pi a^3 C_{Au} \frac{dT_s}{dt} = \mathcal{P}_{abs}(t) - 4\pi a \kappa (T_s - T_0) \rightarrow \delta T_s + \frac{a^2}{3\kappa} C_{Au} \frac{d(\delta T_s)}{dt} = \frac{\mathcal{P}_{abs}(t)}{4\pi a \kappa}$$

$$[\kappa] = M.L^2.T^{-3}.L^{-1}.\Theta^{-1} = M.L.T^{-3}.\Theta^{-1} \quad [C_{Au}] = M.L^2.T^{-2}.L^{-3}.\Theta^{-1} = M.L^{-1}.T^{-2}.\Theta^{-1} \rightarrow [\tau] = T$$

**18 & 19)** Le régime transitoire disparaît très vite car  $\tau = 1,4 \cdot 10^{-10} \text{ s}$  En régime sinusoïdal forcé, le terme " $\tau \frac{d(\delta T_s)}{dt}$ " est négligeable car  $\Omega\tau \ll 1 \rightarrow \delta T_s = \frac{P_{abs}(t)}{4\pi a\kappa} \rightarrow \overline{\delta T_s} = \frac{P_0}{4\pi a\kappa} = 5,0 \text{ K}$

**20)** La constante  $r_{th}$  est une **distance caractéristique de pénétration** de l'onde thermique dans le gel. Elle est analogue à l'épaisseur de peau ( $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\gamma}}$ ) d'un métal plongé dans une onde électromagnétique mais aussi à la distance de pénétration de la fonction d'onde évanescgente responsable de l'effet tunnel ...

**21)** Par continuité de la température,  $\alpha = \frac{P_0}{4\pi\kappa} = \overline{\alpha\delta T_s}$

**22)** A  $r$  fixé, la moyenne dans le temps de " $T(r, t) - T_0$ " est  $\frac{\alpha}{r}$

Puis  $\langle T(r, t) - T_0 \rangle = \frac{3}{4\pi(r_{th}^3 - a^3)} \int_a^{r_{th}} \frac{\alpha}{r} 4\pi r^2 dr \sim \frac{3}{r_{th}^3} \int_0^{r_{th}} \alpha r dr = \frac{3\alpha}{2r_{th}} = \frac{3\overline{\alpha\delta T_s}}{2r_{th}} = 0,29 \text{ K}$

**23)** On peut songer à un interféromètre à division d'amplitude type **Mach-Zehnder** dans lequel on placera une cuve référence sans nano particule et une cuve avec nano particule. La différence de chemin optique étant sensible à la variation d'indice, l'intensité lumineuse sera sensible à la variation de température.

**24)** Dans une onde électromagnétique,  $\|\vec{E}_1\| \sim c\|\vec{B}_1\| \rightarrow \frac{\|\vec{F}_{magn}\|}{\|\vec{F}_{elec}\|} \leq \frac{\|\vec{v}_1\| \|\vec{B}_1\|}{\|\vec{E}_1\|} \sim \frac{\|\vec{v}_1\|}{c} \ll 1$  **Non relativiste**

**25)**  $\vec{j}_1 = -en_{e0}\vec{v}_1 \rightarrow \frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t} + \frac{\vec{j}_1}{\tau} = \frac{n_{e0}e^2}{m_e} \vec{E}_1 = \omega_p^2 \epsilon_0 \vec{E}_1$  (\*)

**26)** A  $t$  donné, le champ  $\vec{E}_1$  est uniforme sur **un plan** d'équation  $x = \text{cste}$ , l'onde est plane.

On reconnaît la variable " $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ " qui témoigne du caractère progressif dans la direction  $\vec{e}_x$  ( $\vec{k} = k \vec{e}_x$ )

L'onde est polarisée rectilignement suivant  $\vec{e}_y$  et présente la propriété transverse car  $\vec{E}_1 \perp \vec{k}$ .

**27)** Les équations de Maxwell sont composées de deux équations de liaisons aux sources

$$\text{div } \vec{E}_1 = \frac{en_{e0} - e(n_{e0} + n_{e1}(M, t))}{\epsilon_0} = -\frac{en_{e1}(M, t)}{\epsilon_0} \quad \text{rot } \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_1(M, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$$

et de deux équations intrinsèques de structure  $\text{div } \vec{B}_1 = 0 \quad \text{rot } \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$

**28-31)**  $\text{div } \vec{E}_1 = \frac{\partial E_{1y}}{\partial y} = 0 \rightarrow n_{e1}(M, t) = 0 \quad \text{rot } \text{rot } \vec{E}_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B}_1 \Leftrightarrow \Delta \vec{E}_1 = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2}$  (\*\*)

A ce stade, il n'est pas possible d'isoler  $\vec{E}_1$ , il nous faut traduire en complexe les relations (\*) et (\*\*)

$$(*) \rightarrow (1 + i\omega\tau) \vec{j}_1 = \omega_p^2 \epsilon_0 \tau \vec{E}_1 \quad (***) \rightarrow -\underline{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_1 = i\omega\mu_0 \vec{j}_1 - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_1$$

On en déduit que  $\underline{n}^2 = 1 - \frac{i\mu_0 c^2 \omega_p^2 \epsilon_0 \tau}{\omega(1 + i\omega\tau)} = 1 - \frac{i\omega_p^2 \tau}{\omega(1 + i\omega\tau)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\omega/\tau} = 1 - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} - i \frac{\omega_p^2 \tau^2}{\omega\tau + \omega^3 \tau^3}$

**32-33)**  $\omega\tau \gg 1 \rightarrow \epsilon_1 \sim 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$  et  $\epsilon_2 \sim \frac{\omega_p^2}{\omega^3 \tau}$  ( $\epsilon_1 + \omega\tau\epsilon_2 = 1$  mais ceci était vrai  $\forall \omega$ ) Comparer  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$

n'est pas évident, surtout qu'il semblerait que  $\epsilon_1$  soit négatif ! (Tracé de  $-\epsilon_1$ ,  $\omega < \omega_p$  d'après la suite ...)

Supposons que  $\omega$  soit suffisamment éloigné de  $\omega_p$  (!) alors  $|\epsilon_1| > \epsilon_2$

Les droites tracées nous poussent à considérer que  $\omega\tau \gg 1$  car alors  $-\epsilon_1 \sim \frac{\omega_p^2}{4\pi^2 c^2} \lambda^2 - 1$  et  $\frac{\epsilon_2}{\lambda} \sim \frac{\omega_p^2}{8\pi^3 c^3 \tau} \lambda^2$

La pente (a) vaut  $51 \mu\text{m}^{-2} = 5,1 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-2} \rightarrow \omega_p = 1,3 \cdot 10^{16} \text{ rad.s}^{-1} \rightarrow n_{e0} = 5,7 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$

Si seul l'électron de valence  $6s^1$  était libéré, on aurait  $n_{e0} = \frac{4}{(2\sqrt{2}r_{Au})^3} = 3,6 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$  Il en manque !

La pente (b) vaut  $3,3 \mu\text{m}^{-3} = 3,3 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3} \rightarrow \tau = 8,2 \cdot 10^{-15} \text{ s}$

**34)** Le déplacement étant petit, on se limite à la recherche du champ en un point  $M$  appartenant aux deux boules. Ce champ est la somme des champs créés par les deux distributions sphériques uniformes de densité volumique de charge  $\pm\rho$ . Le théorème de Gauss nous permet d'exprimer chaque champ :

$$\vec{E}_{réseau}(M) = \frac{\rho\vec{PM}}{3\epsilon_0} \text{ et } \vec{E}_{nuage}(M) = -\frac{\rho\vec{NM}}{3\epsilon_0} \text{ Avec respectivement } P \text{ et } N \text{ les centres du réseau et du nuage}$$

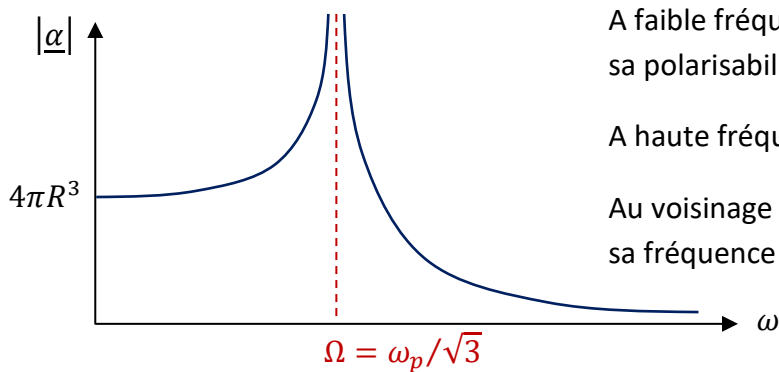
Le champ total est donc  $\vec{E} = \frac{\rho\vec{PN}}{3\epsilon_0} = \frac{\rho\vec{r}}{3\epsilon_0}$  Champ **uniforme** donnant naissance à une **force de rappel** du type " $-k\vec{r}$ " compatible avec les notions d'oscillations propres et de pulsation propre.

**35)** On applique la deuxième loi de Newton au nuage électronique de masse " $M = \frac{4}{3}\pi R^3 n_{e0} m_e$ " et de charge " $Q = -\frac{4}{3}\pi R^3 n_{e0} e$ ". Il subit la force de rappel " $-k\vec{r} = -M\Omega^2\vec{r} = -\frac{4}{3}\pi R^3 n_{e0} m_e \Omega^2\vec{r}$ " et l'autre force électrique " $-\frac{4}{3}\pi R^3 n_{e0} e \vec{E}_1(0, t)$ ". Ainsi  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \Omega^2\vec{r} = -\frac{e}{m_e}\vec{E}_1(\mathbf{0}, t)$

$$\mathbf{36-38) } \vec{r} = -\frac{e}{m_e(\Omega^2 - \omega^2)}\vec{E}_1 \rightarrow \vec{p} = Q\vec{NP} = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{n_{e0} e^2}{m_e(\Omega^2 - \omega^2)}\vec{E}_1$$

$$\rightarrow \underline{\alpha}(\omega) = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\omega_p^2}{(\Omega^2 - \omega^2)} = 4\pi R^3 \frac{1}{1 - 3\omega^2/\omega_p^2} \quad [\epsilon_0 E_1] = Q \cdot L^{-2} \text{ et } [p] = Q \cdot L \text{ donc } [|\underline{\alpha}|] = L^3$$

**39)** Si on tenait compte d'effets dissipatifs, la résonance en  $\omega = \Omega$  **ne serait plus infinie**.



A faible fréquence, la nanoparticule se polarise et sa polarisabilité est indépendante de la fréquence.

A haute fréquence, la nanoparticule ne se polarise plus.

Au voisinage de  $\omega = \Omega$ , la nanoparticule est excitée à sa fréquence propre, il y a résonance en polarisabilité.

**40)** Dans le vide ( $n_0 = 1$ ) et sans phénomène dissipatif (terme " $i\frac{\omega}{\tau}$ " négligé),

$$\underline{\alpha}(\omega) = 4\pi R^3 \frac{1 - \omega_p^2/\omega^2 - 1}{1 - \omega_p^2/\omega^2 + 2} = 4\pi R^3 \frac{\omega_p^2/\omega^2}{\omega_p^2/\omega^2 - 3} \quad \text{On retrouve bien l'expression établie à la question 38.}$$

$$\mathbf{41) } \underline{\alpha}(\omega) = 4\pi R^3 \frac{(1-n_0^2)(\omega^2 - i\omega/\tau) - \omega_p^2}{(1+2n_0^2)(\omega^2 - i\omega/\tau) - \omega_p^2} = 4\pi R^3 \frac{[(1-n_0^2)\omega^2 - \omega_p^2 - i(1-n_0^2)\omega/\tau][(1+2n_0^2)\omega^2 - \omega_p^2 + i(1+2n_0^2)\omega/\tau]}{[(1+2n_0^2)\omega^2 - \omega_p^2]^2 + (1+2n_0^2)^2 \omega^2/\tau^2}$$

$$|\mathcal{Jm}(\underline{\alpha}(\omega))| = 12\pi R^3 n_0^2 \omega_p^2 \frac{\omega/\tau}{[(1+2n_0^2)\omega^2 - \omega_p^2]^2 + (1+2n_0^2)^2 \omega^2/\tau^2} \quad \text{Fonction qui présente bien un maximum}$$

mais celui-ci se situe dans le proche UV ... ( $\omega_{abs}^{max} \sim 5,7 \cdot 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\lambda_{abs}^{max} \sim 3,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ )