

1 & 2) $\vec{\mu} = I\pi R^2 \vec{e}_z$ Tous les points de la sphère décrivent un cercle, on leur associe une boucle de courant et donc un moment magnétique selon \vec{e}_z si la sphère tourne dans le sens **direct**.

3) D'après l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle ($\mathcal{E}_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$), l'unité de μ est bien $J \cdot T^{-1}$.

4 & 5) $\mathcal{E}_p^{min} = -\mu_p B_0$ Equilibre **stable** avec $\vec{\mu}_p$ et \vec{B}_0 colinéaires et de **même sens**.

$\mathcal{E}_p^{max} = \mu_p B_0$ Equilibre **instable** avec $\vec{\mu}_p$ et \vec{B}_0 colinéaires et de **sens opposés** $\rightarrow \Delta\mathcal{E}_p = 1,8 \cdot 10^{-7} eV$

6) L'énergie thermique est de l'ordre de $kT \sim 3 \cdot 10^{-2} eV \gg \Delta\mathcal{E}_p$ On s'attend à une équipartition.

7) La RMN n'a **pas d'impact chimique** sur les molécules d'eau.

8 & 9) $\mathcal{P} = A \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{kT}\right) \rightarrow \frac{N_+}{N_-} = \exp\left(-\frac{2\mu B_0}{kT}\right) \sim 1 - \frac{2\mu B_0}{kT} < 1$

10) Les dipôles dont le moment est dans le **même sens que \vec{B}_0** sont les plus nombreux.

11 & 12) $\eta = \frac{1 - \exp\left(-\frac{2\mu B_0}{kT}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2\mu B_0}{kT}\right)} \sim \frac{\mu B_0}{kT} = 3,2 \cdot 10^{-6}$ On peut dire qu'il y a **équipartition**.

13 à 15) $\vec{\mu}_e = -\frac{e}{T} \pi r_B^2 \vec{e}_z = -\frac{evr_B}{2} \vec{e}_z$; $\vec{\sigma}_e = m_e r_B v \vec{e}_z \rightarrow \gamma_e = -\frac{e}{2m_e} = -8,8 \cdot 10^{10} s^{-1} \cdot T^{-1}$

16 à 18) En effet, $\gamma_p \frac{\hbar}{2} = \mu_p$; $hf = \Delta\mathcal{E}_p = 2\mu_p B_0 = \gamma_p \hbar B_0 \rightarrow f = \frac{\gamma_p B_0}{2\pi} = 42 \text{ MHz}$ ($\lambda = 7,1 \text{ m}$)

19) On applique le T.M.C. au dipôle : $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\gamma \vec{B}_0 \wedge \vec{\mu}$

20 à 22) $\vec{\mu} \cdot \frac{d\vec{\mu}}{dt} = 0$ Et $\vec{e}_z \cdot \frac{d\vec{\mu}}{dt} = 0$ Donc $\|\vec{\mu}\| = \text{cste}$ Et $\mu_z = \text{cste}$

Précession de $\vec{\mu}$ autour de Oz à la vitesse angulaire ω_0 ($\vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0$), dans le sens direct pour un électron (sens rétrograde pour un proton).

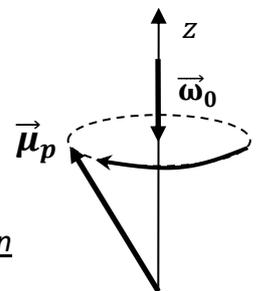


Figure pour un proton

23 à 26) $\vec{M} = (N_- - N_+) \mu_p \vec{e}_z = \eta N \mu_p \vec{e}_z = \frac{N \gamma_p^2 \hbar^2 B_0}{4kT} \vec{e}_z$ Avec $N = \frac{2\rho N_A}{m} \sim 7 \cdot 10^{28} m^{-3}$

27) $B \sim 6 \cdot 10^{-10} T \ll B_0$

28) En présence du champ perturbateur, l'aimantation \vec{M} évolue et son comportement est analysé. En l'absence du champ perturbateur, l'aimantation est constante ($\vec{M} = \vec{M}_0$) et ne présente aucun intérêt.

29) Divisons par γ les équations de Bloch. Nous obtenons l'écriture du T.M.C. $\frac{d\vec{\Sigma}}{dt} = \vec{M} \wedge \vec{B}_0 + \vec{C}_r$

$$\text{Avec } \vec{C}_r = -\frac{\sigma_x}{T_2} \vec{e}_x - \frac{\sigma_y}{T_2} \vec{e}_y - \frac{\sigma_z - \sigma_0}{T_1} \vec{e}_z$$

30) Le domaine des radiofréquences est très large, il s'étend de **100 kHz** à **1 GHz** environ. Il comprend donc la fréquence de résonance évaluée à la question 18.

31) Les équations de structure : $\text{div } \vec{B}(M, t) = 0$ (Maxwell-Thomson) $\text{rot } \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$ (Maxwell-Faraday)

Les équations de liaison aux sources : $\text{div } \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$ (Maxwell-Gauss) $\text{rot } \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$ (Maxwell-Ampère)

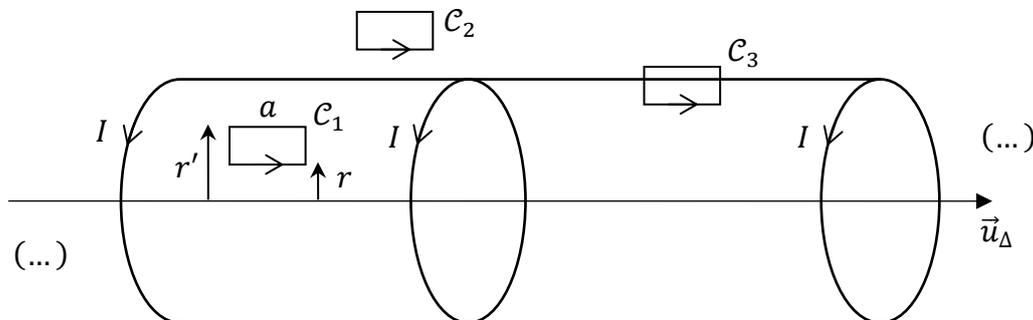
Dans l'A.R.Q.S. seule est modifiée la dernière équation : $\text{rot } \vec{B}(M, t) \sim \mu_0 \vec{j}(M, t)$

32) Le théorème d'Ampère dans l'A.R.Q.S. est la forme intégrale de l'équation précédente :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{par } C}^{\text{enlacé}}$$

33) La distribution est invariante par translation suivant \vec{u}_Δ et par rotation autour de $\Delta : \mathbf{B}(r)$

Tous les plans perpendiculaires à Δ sont des plans de symétrie pour la distribution, donc ce sont des plans d'antisymétrie pour $\vec{B} : \vec{B} = \mathbf{B}(r) \vec{u}_\Delta$



Appliquons le théorème d'Ampère sur les contours C_1 et C_2 contenus dans un plan méridien :

$$\oint_{C_{1,2}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{par } C_{1,2}}^{\text{enlacé}} = 0 \Leftrightarrow aB(r) - aB(r') = 0 \Leftrightarrow \mathbf{B}(r) = \mathbf{B}(r')$$

34) Appliquons le théorème d'Ampère sur le contour C_3 : $aB_{\text{int}} - aB_{\text{ext}} = \mu_0 n a I \Leftrightarrow \mathbf{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I$

35) $\vec{B}_1 = \mu_0 n I_0 (\cos(\Omega t) \vec{e}_x - \sin(\Omega t) \vec{e}_y)$

Ceci est bien un champ tournant à la vitesse angulaire Ω dans le sens horaire et de norme $\mu_0 n I_0$.

36) $\vec{B}'_1 = \mathbf{B}_1 (\cos(\Omega t) \vec{e}_x - \sin(\Omega t) \vec{e}_y) + \mathbf{B}_1 (\cos(\Omega t) \vec{e}_x + \sin(\Omega t) \vec{e}_y)$

37 à 39) $\vec{j} = \frac{I_0}{a^2} \vec{e}_\theta$ Appliquons le théorème d'Ampère sur un contour C_4 placé en $r = 0$ et $r' > R_2$:

$$aB_{r=0} = \mu_0 j S = \mu_0 j a (R_2 - R_1) \Leftrightarrow \mathbf{B}_{r=0} = \mu_0 \frac{I_0}{a^2} (R_2 - R_1) = 1 T \quad \text{Si } I_0 = 16 A$$

40) $[\overrightarrow{rot} \vec{j}] = I.L^{-3}$ et $[\vec{B}].L^2 = [L].I \rightarrow [\Lambda] = [L]^{-1}.L^{-1}$ L'unité de Λ est $H^{-1}.m^{-1}$

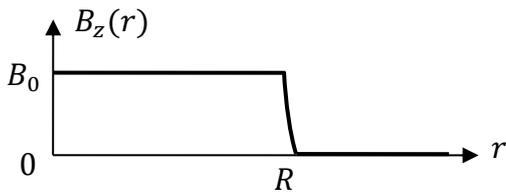
41 & 42) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot} \vec{B}) = -\Delta \vec{B} \Leftrightarrow \Delta \vec{B} + \overrightarrow{rot}(\mu_0 \vec{j}) = \vec{0} \Leftrightarrow \Delta \vec{B} - \frac{\vec{B}}{\delta^2} = \vec{0}$ Avec $\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \Lambda}}$

43) La distribution est invariante par translation suivant \vec{e}_y et \vec{e}_z : $B(x)$

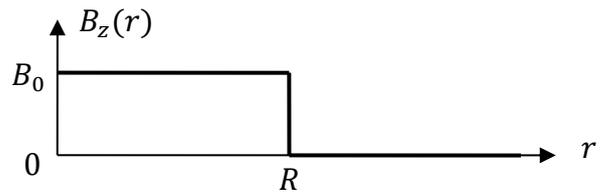
44) La continuité de \vec{B} en $x = 0$ impose que \vec{B} soit dirigé selon $\vec{e}_z \rightarrow \vec{B} = (\alpha e^{-\frac{x}{\delta}} + \beta e^{\frac{x}{\delta}}) \vec{e}_z$

Mais le champ ne doit pas diverger en $x \rightarrow -\infty$, donc $\alpha = 0$ et finalement $\vec{B} = B_0 e^{\frac{x}{\delta}} \vec{e}_z$

45 à 47) $\vec{j} = \frac{\overrightarrow{rot} \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{B_0}{\delta \mu_0} e^{\frac{x}{\delta}} \vec{e}_y$ Le paramètre δ représente la **distance caractéristique de pénétration** du champ \vec{B} dans le matériau supraconducteur. A partir de **quelques dixièmes de micromètre**, \vec{B} est nul.

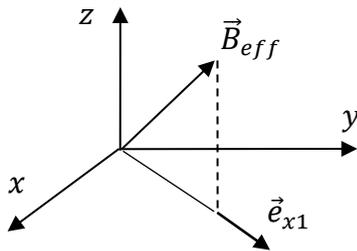


Que l'on peut simplifier ainsi ...

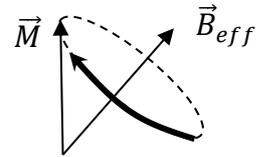


48) On applique le T.M.C. à l'assemblée de dipôles : $\left(\frac{d\vec{S}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{ext} \Leftrightarrow \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_0} = \gamma_p \vec{M} \wedge \vec{B}_{ext}$

49 à 53) $\vec{\omega}_{R_1/R_0} = -\omega \vec{e}_z$; $\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_1} = \gamma_p \vec{M} \wedge \left(\vec{B}_{ext} - \frac{\omega}{\gamma_p} \vec{e}_z\right) = \gamma_p \vec{M} \wedge \left(\frac{\omega_1}{\gamma_p} \vec{e}_{x1} + \frac{\omega_0 - \omega}{\gamma_p} \vec{e}_z\right)$



Précession de \vec{M} autour de \vec{B}_{eff}
à la vitesse angulaire $-\gamma_p \|\vec{B}_{eff}\|$



54 à 56) Si on applique un faible champ tournant, l'aimantation restera à peu près selon \vec{e}_z . C'est le cas également si $\Delta\omega \gg |\omega_1|$. Par contre si $\Delta\omega \ll |\omega_1|$ voire $\Delta\omega = 0$, \vec{M} tourne autour de \vec{e}_{x1} en demeurant **perpendiculaire** à \vec{e}_{x1} . A la résonance, le vecteur aimantation balaie **toutes les directions de l'espace**.

57 & 58) A la résonance, \vec{B}_{eff} est selon \vec{e}_{x1} et la vitesse angulaire de précession est $-\omega_1$.

59) Si on note \vec{B}_2 l'autre champ tournant et R_2 le référentiel dans lequel \vec{B}_2 est statique, la même étude que précédemment (sans \vec{B}_1) donne à la résonance : $\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_2} = \gamma_p \vec{M} \wedge \left(\frac{\omega_1}{\gamma_p} \vec{e}_{x2} + \frac{2\omega_0}{\gamma_p} \vec{e}_z\right) \sim \vec{M} \wedge 2\omega_0 \vec{e}_z$

La précession s'effectue à peu près autour de \vec{e}_z , si \vec{M} est initialement selon \vec{e}_z , \vec{B}_2 a peu d'influence.

60) La condition devient $\omega(z) = \omega_0(z) = \gamma_p B_0 f(z)$, la mono chromaticité n'est plus de mise.

61 & 62) $\omega_1 t_{p1} = (2p + 1) \frac{\pi}{2}$ ($p \in \mathbb{N}$) $\rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2\omega_1}$ Et $\omega_1 t_{q2} = (2p + 1)\pi$ ($q \in \mathbb{N}$) $\rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{\omega_1}$

63 & 64) Après le pulse, l'aimantation précesse autour de \vec{B}_0 (\vec{e}_z) à la vitesse angulaire $\omega - \omega_0$ dans R_1 .

65) Après l'impulsion à 90° , l'aimantation transversal M_\perp tend vers 0 avec un temps caractéristique T_2 .

66 à 69) A $t = \theta_1$, l'aimantation est **transversale** ($M_z = 0$), **ce n'est pas un état d'équilibre**.

Puis $M_z \nearrow$ et $M_\perp \searrow$ (M_y **diminue avec oscillations**).

Au-delà de $t = \tau + 2\theta_1$, l'aimantation se redresse ($-\vec{e}_z$ à \vec{e}_z), M_\perp et donc M_y **passent par un maximum**.

70) L'aimantation crée un champ B_y variable dont **le flux** à travers les bobines **varie !**

71) Ce flux est proportionnel à R^2 et à M_y (donc à B_0), la f.é.m. d'induction est proportionnelle à R^2 et à $\frac{dM_y}{dt}$ (donc à B_0 et à $e^{-((t-\theta_1)/T_2^*)} \sin(\omega_0(t - \theta_1))$). Les propositions **4, 6, 7** et **9** sont exactes.

72) La courbe de l'enveloppe $Y(t)$ correspond à l'analyse faite aux questions 66 à 69.

L'évaluation de T_2 est alors possible, on peut ainsi détecter une tumeur ($T_2 < 100 \text{ ms}$).